

1 Angabe

Man zeige, daß die Folge $\{a_{nk}\}$ mit $a_{nk} := \frac{n-k}{k^2+n^2}$ gleichmäßig bezüglich n bei $k \rightarrow \infty$ nach Null konvergiert (die anderen Fragen sollen hier nicht angeschnitten werden).

2 Lösung

Beh 1: Es ist $|a_{nk}| \leq \frac{2}{k}$

BW.: $\frac{|n-k|}{n^2+k^2} \leq \frac{n+k}{\frac{1}{2}(n+k)^2} = \frac{2}{n+k} \leq \frac{2}{k}$, wobei man bei der ersten Abschätzung von $n^2 + k^2 \geq \frac{1}{2}(n+k)^2$ gemacht hat, eine Ungleichung, die man durch Äquivalenzumformung für alle $n, k \in \mathbb{N}$ leicht herleiten kann.

Beh 2: Die Folge konvergiert bezüglich n gleichmäßig nach Null bei $k \rightarrow \infty$

BW.: Sei $\epsilon > 0$, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen Beh.1 stets

$$|a_{nk}| < \epsilon,$$

falls nur $k > \left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil + 1$ gilt, wie man ebenfalls durch Äquivalenzumformungen erkennt.