

1 Angabe

Für die Funktion $f(x) := \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$ bestimme man $D(f)$ und eine stetige Fortsetzung von f auf eine möglichst große Teilmenge von \mathbb{R} .

2 Lösung

Zunächst eine allgemeine Vorbemerkung zur *Maximalität*. Die Menge Ω bestehend aus allen Paaren (M, f) mit

- $D(f) \subseteq M$;
- $D(\tilde{f}) = M$;
- \tilde{f} stimmt mit f auf $D(f)$ überein;
- \tilde{f} ist auf ganz M stetig.

läßt sich wie folgt ordnen:

$$(M, \tilde{f}) \leq (M', \tilde{f}') \Leftrightarrow (M \subseteq M') \text{ und } (\tilde{f}' \text{ eingeschränkt auf } M = \tilde{f}).$$

Danach benützt man das *Lemma von Zorn*, um nachzuweisen, daß Ω ein maximales Element (M, \tilde{f}) besitzt. Wie sich durch Beispiele zeigen läßt, kann es mehrere (M, \tilde{f}) geben, sodaß die Aufgabe keineswegs eindeutig bestimmt sein muß! Im konkreten Fall jedoch wird ein (M, \tilde{f}) durch elementare Überlegungen bestimmt, wie nachstehend ausgeführt.

Wir werden das Beispiel nur für $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ vorzeigen, da die Funktion unter der Wurzel eine *gerade* Funktion ist, sodaß sich alle Überlegungen auf die negativen reellen Zahlen leicht übertragen lassen.

Beh 1: Sei $g(x) := \sqrt{1+x \sin x}$, so gibt es eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mit $(2k-1)\pi < x_{2k-1} < x_{2k} < 2k\pi$ und $D(g) = \mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{k=0}^\infty (x_{2k-1}, x_{2k})$

Bew: Der Sachverhalt kann mittels Skizze geklärt werden. Es war vom Aufgabensteller nicht daran gedacht, Fixpunktsätze, Approximationstechniken und anderes *(mittel)schweres Geschütz* zur genaueren Beschreibung der Nullstellen von g auffahren zu lassen. . . .

Beh 2: Sei $Z(x) := \sqrt{1+x \sin x} - \cos x$ und $N(x) := \sin^2 \frac{x}{2}$ so ist $D(Z) = D(g)$ und $D(N) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

$$\text{Es ist } D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{k=0}^\infty (x_{2k-1}, x_{2k}) \setminus \{2n\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Bew: $D(Z) = D(g)$, wie man unschwer sieht. Danach überlegt man sich $D(f) = D(\frac{Z}{N}) = D(Z) \cap D(N)$, woraus der letzte Teil der Beh folgt.

Beh 3: Falls \tilde{f} eine stetige Fortsetzung von f mit $0 \in D(\tilde{f})$ ist, gilt $\tilde{f}(0) = 2$.

Bew: Elementares Umformen, sowie Benützen von $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ führen auf

$$f(x) = \left(\frac{x}{\sin \frac{x}{2}} + 2 \cos \frac{x}{2} \right) \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + x \sin x + \cos x}}.$$

Ist nun \tilde{f} stetig an $x = 0$, so muß

$$\tilde{f}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

gelten.

Beh 4: An keiner Stelle $y_k := 2k\pi$ mit $k \neq 0$ läßt sich f stetig fortsetzen.

Bew: Es müßte $\tilde{f}(y_k) = \lim_{x \rightarrow y_k} f(x)$ gelten. Der geforderte Grenzwert existiert jedoch nicht.

Beh 5: Wird $M := D(f) \cup \{0\}$ und

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in D(f) \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

gesetzt, so ist (M, \tilde{f}) ein maximales Element in Ω .

Bew: Aus der im Bew von Beh 3 angegebenen Darstellung von f entnimmt man, daß f an allen Stellen y_k unbeschränkt wird. (Lose gesprochen: 'Der Trick aus Beh 3 für das Festlegen von $\tilde{f}(y_k)$ funktioniert nicht').