

1 Angabe

Sei

$$a_{n+1} := a_n a_{n-2} + 2a_{n-1} + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

Man untersuche die Konvergenz der Folge in Abhängigkeit von Startwerten (a_1, a_2) mit $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ und $a_3 \geq 0$.

2 Lösung

Die Lösung besteht in der folgenden Aussage:

Die Folge divergiert stets nach $+\infty$.

Beh.1: *Die Folge divergiert.*

BW: (indirekt). Seien a_1, a_2 derart, daß die Folge $\{a_n\}$ gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Rechenregeln für konvergente (bzw. gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergente) Folgen ergeben die in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ unlösbare Gleichung

$$0 = a^2 + a + 1.$$

Beh.2: *Die Folge ist monoton steigend.*

BW. Es ist

$$a_{n+1} = a_n a_{n-2} + 2a_{n-1} + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \geq a_{n-1}.$$

Da kein Grenzwert in \mathbb{R} existiert, kann demnach die Folge nur gegen $+\infty$ divergieren.

Bedauerlicherweise wurde der Zusatz über die Anfangswerte in der Angabe fortgelassen.