

## 1 Angabe

Bestimmen Sie näherungsweise die positive Lösung der angegebenen Gleichung durch Verwendung der angeführten Taylorpolynome mit Anschlußstelle 0.

## 2 Lösung

**Beh 1:** Keine Lösung erfüllt  $x > 1$

Bew: Wegen  $|x| > 1$  und  $|\sin x| \leq 1$ .

**Beh 2:** Für  $j = 1, 3, 5$  findet man als Näherungslösungen  $x_1 = 1$ ,  $x_3 = \sqrt{\frac{6}{7}} = 0,92582 \dots$  und  $x_5 = \sqrt{\frac{120}{70 + \sqrt{4780}}} = 0,92668 \dots$

Bew: Durch Aufstellen der Taylorpolynome. wenn  $x \geq y$  angenommen werden). Das TP 5.O. ergibt auch eine Lösung der Größenordnung  $\sqrt{40}$ , die wegen Beh 1 keine Näherungslösung darstellen kann.

**Beh 3:** Ist  $T_k$  das  $k$ .te Taylorpolynom von  $\sin x$  mit Anschlußstelle  $x = 0$ , so gilt für alle  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$T_{2m}(x) - x^3 \geq \sin x - x^3 \geq S_{2m+1}(x).$$

Bew: Durch vollständige Induktion die Tatsache benützend, daß die Taylorreihe alternierend ist.

**Beh 4:** Alle Näherungspolynome, d.i.,  $\phi_1 = x - x^3$ ,  $\phi_3 = x - \frac{7}{6}x^3$  und  $\phi_5 = x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$  sind im Intervall  $[0,6, \infty)$  monoton fallend.

Bew: Elementare Kurvendiskussion.

**Beh 5:**  $T_{2m}(x) - x^3 \geq \sin x - x^3 \geq T_{2l+1}(x) - x^3$ .

Bew: Ähnlich wie Behauptung 2.

**Beh 6:** Ist  $\xi$  Nullstelle, und sind die  $x_k$  entsprechende Nullstellen der  $\phi_k$ , so gilt  $x_{2m} < \xi$  und  $\xi < x_{2l+1}$ .

Bew: Aus Beh 4 und der Monotonie.

**Beh 7:**  $x_1 < x_5 < \xi < x_3$ , insbesondere  $0,92667 < \xi < 0,92583$ .

Bew: Aus der vorigen Behauptung durch Einsetzen von  $m, l \in \{0, 1\}$ .