

1 Angabe

Man bestimme, soweit vorhanden, den Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n}}{\sqrt{n^2 - 1} - n}.$$

2 Lösung

Beh 1: $a_n = b_n c_n$ mit

$$b_n := -n, \quad c_n := \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}}\right)^2}.$$

BW: Anwendung der Formel $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, wobei $a := \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1}$ und $b := \sqrt[3]{n^3 + n}$ ergibt für den Zähler der Folge der Ausdruck:

$$\frac{n^2 - n + 1}{(\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1})^2 + \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} \sqrt[3]{n^3 + n} + (\sqrt[3]{n^3 + n})^2},$$

und mittels $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ für $a := \sqrt{n^2 - 1}$, $b := n$ wird der reziproke Wert des Nenners umgeformt zu

$$\frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{-1}.$$

Anschreiben des Bruches, Herausheben der höchsten Potenz in n liefert Beh.1.

Beh 2: Die Folge divergiert nach $-\infty$.

BW: Die Folge $\{c_n\}$ konvergiert sichtlich nach $\frac{2}{3}$, welches positiv ist, und $\{b_n\}$ nach $-\infty$. Somit konvergiert die Folge $\{a_n\}$ als deren Produkt nach $-\infty$.