

1 Angabe

Man stelle fest, ob es eine Folge $\{a_n\}$ mit \mathbb{N} als Menge ihrer Verdichtungspunkte.

2 Lösung (D.A.Dempsey)

Es sei $\{b_n\}$ eine Folge, die alle positiven rationalen Zahlen durchläuft (etwa mittels Diagonalverfahren nach Cantor). Als Kandidat einer Folge wählen wir die Folge $\{a_n\}$, die durch

$$a_n := [1 + b_n]$$

definiert ist. Man erkennt, daß $\{a_n\}$ alle natürlichen Zahlen durchläuft. Nun ist für rationale, positive Zahlen q, q' stets $[q] = [q']$ genau dann, wenn $[q] \leq q' < [q] + 1$ gilt. Deshalb ist (man setze $q := a_n$ und $q' := b_k + 1$) $a_n = a_k$ genau dann, wenn $a_n \leq b_k + 1 < a_n + 1$. Somit gibt es unendlich viele Indizes k für welche $a_n = a_k$ gilt. Deshalb ist jede natürliche Zahl ein Häufungspunkt. Bleibt noch zu zeigen, daß keine weiteren Häufungspunkte der Folge $\{a_n\}$ auftreten können. Ist v ein Verdichtungspunkt, der nicht in \mathbb{N} liegt, so findet man ein $\epsilon > 0$ mit $\mathbb{N} \cap (v - \epsilon, v + \epsilon) = \emptyset$ (man wähle $\epsilon := \frac{1}{2} \min\{|v - n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ und überlege sich zuvor, daß ϵ wohldefiniert ist). Dann liegt kein Folgenglied von $\{a_n\}$ in $(v - \epsilon, v + \epsilon)$, ein Widerspruch zu v Verdichtungspunkt.