

1 Angabe

Man untersuche sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ als auch das Cauchyprodukt auf Konvergenz, wobei

$$a_0 := 1, a_n := -\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (n \geq 1), \quad b_n := \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} (2^n + 2^{-(n+1)}) \quad (n \geq 0).$$

2 Lösung

Beh 1: Es sei $c_n := \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ der n .te Koeffizient des Cauchyprodukts. Dann ist

$$c_n = 3^{n-1}(1 + 3 \cdot 2^{-2n} - 2^{-n})$$

BW: Für $n = 0$ erfolgt der Nachweis durch Einsetzen und Überprüfen, daß die angegebene Formel für $n = 0$ tatsächlich 1 ergibt. Wenn $n > 0$ ist, bedient man sich der Formel für das CP in der aufgespaltenen Form (weil a_0 sich nicht durch 0-Setzen in der für a_n und $n \geq 1$ angegebenen Formel ergibt)

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b_n + \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} (2^n + 2^{-(n+1)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^j \left(\frac{3}{2}\right)^{n-j-1} (2^{n-j} + 2^{-(n-j+1)}) \end{aligned}$$

Nun ergibt elementare Rechnung und die Anwendung der Summelformel für eine endliche geometrische Progression ($a \leq b$)

$$\sum_{j=a}^b q^j = q^a \frac{q^{b-a} - 1}{q - 1}$$

die Behauptung.

Beh 2: Die Reihen divergieren

BW: Anwendung z.B. des Wurzelkriteriums.