

## 1 Angabe

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$  und  $I := [a, b]$ . Man zeige die gleichmäßige Stetigkeit von  $f(x) := 3^{\frac{1}{x}}$  auf  $[a, b]$ , indem man zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta(\epsilon)$  mit

$$\forall x, y \in I, |x - y| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

## 2 Lösung

Im Folgenden ein Vorschlag, das Beispiel mit etwas 'Blick aufs Allgemeine' anzugehen.

**Beh 1:** Sind  $I, J \subseteq \mathbb{R}$ , und  $h : I \rightarrow J$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  auf jeweils  $I$  bzw.  $J$  gleichmäßig stetige Funktionen, so ist  $g \circ f$  auf  $I$  gleichmäßig stetig und es ist

$$\delta_{g \circ h} = \delta_h \circ \delta_g$$

geeignet für die Anwendung des  $\epsilon - \delta(\epsilon)$ -Kriteriums.

Bew: ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

Anmerkung: Diese Beobachtung soll hier für  $I := [a, b] \cap \mathbb{Q}$ ,  $J := [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}] \cap \mathbb{Q}$ ,  $h(x) := \frac{1}{x}$  und  $g(x) := e^x$  benützt werden. In diesem Sinne und mit diesen Bezeichnungen die weiteren Schritte.

**Beh 2:** Es sei  $q := [a^2] + 1$ , so ist  $\delta_h(\epsilon) = q^2 \epsilon$ .

Bew: Die Kette von Abschätzungen für alle  $x, y \in I$  (und somit in  $I \cap \mathbb{Q}$ )

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{a^2} |x - y| \leq \frac{1}{q^2} |x - y|$$

zeigt die Richtigkeit der Behauptung.

**Beh 3:** Es sei  $g(x) := 3^x$  definiert auf  $I' := [a', b'] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^+$ . Weiters sei  $q' := [a'] + 1$ . Dann ist als  $\delta_g$  die Funktion

$$\delta_h(\epsilon) = \min\{3^{-1-b'} \epsilon, \frac{1}{3}\}$$

geeignet.

Bew: Analog wie im Beispiel 300 (welches Sie ebenfalls 'im Netz finden').

Die Beschreibung von  $\delta_f(\epsilon)$  gelingt nun mittels der beiden Behauptungen. Man findet

$$\delta_f(\epsilon) = \min\{3^{-1-\frac{1}{a}} q^2 \epsilon, \frac{1}{3}\}.$$