

1 Angabe (harmlos abgeändert)

Auf \mathbb{N} werde durch $k r n$ genau dann, wenn kn gerade ist, eine Relation r definiert. Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie bzw. Transitivität erfüllt r . Welche Paare muß man mindestens hinzufügen, um r zu einer transitiven Relation R zu erweitern. Ist R eine Äquivalenzrelation und wenn ja, welche Äquivalenzklassen ergeben sich?

2 Lösung

Beh 1: r ist nicht reflexiv.

BW.: Weil 1 nicht mit sich selbst in Relation r steht.

Beh 2: r ist symmetrisch.

BW.: Ist $k r n$, so ist kn gerade, somit wegen der Kommutativität der Multiplikation natürlicher Zahlen auch nk , als gilt $k r n$.

Beh 3: r ist weder antisymmetrisch noch transitiv.

BW.: Es ist $1 r 2$ und $2 r 1$. Wäre r antisymmetrisch oder transitiv, so müßte $1 r 1$ gelten.

Beh 4: Um eine transitive Erweiterung R zu bekommen, müssen auf jedenfall die Paare $(2k - 1, 2l - 1)$ für beliebiges $k, l \in \mathbb{N}$ hinzugefügt werden. Fügt man diese Paare hinzu, ergibt sich $k R n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist R Äquivalenzrelation mit nur einer Äquivalenzklasse, nämlich \mathbb{N} .

BW.: Da $(2k - 1, 2) \in r$ und $(2, 2l - 1) \in r$, ergibt die Forderung der Transitivität die Bedingung $(2k - 1, 2l - 1) \in R$.

Sei $k, n \in \mathbb{N}$. Ist eine der Zahlen gerade, so ist $k r n$ lt. Definition von r und somit $k R n$, weil ja R als Erweiterung von r gedacht war.

Sind beide Zahlen ungerade, so sind sie in Relation R gemäß der Definition von R . Hieraus folgt, daß alle Elemente in einer Klasse liegen, nämlich \mathbb{N} selbst.