

1 Angabe

Es sei eine Folge $\{a_n\}$ durch

$$a_n := (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$$

gegeben. Man zeige daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und stelle fest, ob auch absolute Konvergenz vorliegt. Bestimmen Sie ein (womöglich recht kleines) k so, daß der Fehler bei der Summation bis k kleiner als 10^{-3} ist. Ist der erhaltene Approximationswert größer oder kleiner als der wahre Wert?

2 Lösung

Intuition: Läßt man die ‘1’en weg, (für großes n sollte der Wert von a_n nur ‘sehr geringfügig’ abweichen), so erhält man $a'_n = (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$, eine geometrische Reihe, die absolut konvergiert. Deshalb erhofft man, das gleiche Konvergenzverhalten für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nachweisen zu können.

Beh 1: *Die Reihe konvergiert absolut.*

BW: Die n -te Potenz läßt hoffen, das Wurzelkriterium anwenden zu können. Es ist

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} && \text{Einsetzen} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} && \text{falls der Grenzwert} \\ &= \frac{2}{3} && \text{existiert} \\ &&& \text{Er existiert, somit ist der} \\ &&& \text{vorige Schritt im nach-} \\ &&& \text{hinein gerechtfertigt} \end{aligned}$$

Da $\frac{2}{3} < 1$ ist, konvergiert die Reihe absolut.

Beh 2: *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|s - s_k| \leq a_{k+1}$.*

BW: Es genügt hierzu wegen S.56 die Monotonie von

$$\{|a_n|\}$$

zu zeigen.

Es ist

$$\frac{2n+1}{3n+1} \geq \frac{2n+3}{3n+4},$$

wie man durch Äquivalenzumformungen leicht bestätigt. Weiters ist

$$1^{\frac{1}{n}} \geq \left(\frac{2n+3}{3n+4} \right)^{\frac{1}{n}}$$

ebenfalls durch Äquivalenzumformungen leicht herzuleiten. Multiplikation und Umformungen ergeben die Behauptung.

Beh 3: Für $k \geq 17$ ist $|s - s_k| < 10^{-3}$. Weiters ist $s - s_{18} > 0$.

BW: Da $|a_{k+1}| \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$ gilt, muß k mindestens so groß sein, daß

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \leq 10^{-3}$$

erfüllt ist. Ein Blick auf den Taschenrechner zeigt, daß k mindestens 17 sein sollte – ein Anhaltspunkt. Der Taschenrechner gibt für

$$\frac{1}{|a_{18}|} = 1255.7332031,$$

somit ist es sinnvoll, händisch eine Abschätzung $\frac{1}{|a_{18}|} \geq 1000$ zu suchen:

$$\frac{1}{|a_{18}|} = \left(\frac{55}{37}\right)^{18} = \left(\frac{3025}{1369}\right)^9 > \left(\frac{22}{10}\right)^9 = \left(\frac{10648}{1000}\right)^3 > 10^3.$$

Es ist $\{|a_n|\}$ eine monotone Nullfolge. Deshalb ergibt das Vorzeichen von a_{k+1} , in unserem Falle jenes von a_{18} , das Vorzeichen des Fehlers.