

1 Angabe

Man berechne den Wert von $S := \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^k}$.

2 Lösung

Falls die Reihe bei vertauschter Summation, also $R := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^k}$ absolut konvergiert, so auch die ursprüngliche. Die absolute Konvergenz von R ist gleichbedeutend zur Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $a_n := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^k}$.

Beh 1: $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

BW: Anwendung der geometrischen Reihe $\sum_{j=2}^{\infty} q^j = q^2 \frac{1}{1-q}$ mit $q := \frac{1}{2+n}$ und elementarer Umformungen.

Beh 2: $R = S = \frac{1}{2}$.

BW.: Man zeigt für die n .te Partialsumme $R_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$ (so ähnliche Beispiele gab es schon früher). Hieraus ergibt sich $R = \frac{1}{2}$. Wegen der obigen Anmerkung sind die Doppelreihen beide absolut konvergent und haben deshalb den gleichen Grenzwert. Somit ist $R = S$.