

1 Angabe

Für die Funktionenfolge $f_n(x) := \frac{n^2 x}{1+n^2 x^2}$ bestimme man den Konvergenzbereich, sowie dort die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Für welche reellen $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein (hinreichend kleines) Intervall I mit $x \in I$ und f_n auf I gleichmäßig konvergent?

2 Lösung

Es sei K der Konvergenzbereich.

Beh 1: Falls $x \neq 0$, so ist $f(x) = \frac{1}{x}$. Es ist $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset K$.

BW.: Der zweite Teil der Behauptung ist Konsequenz des ersten Teils. Es sei nun $x \neq 0$, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n^2} + x^2} = \frac{x}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + x^2} = \frac{x}{0 + x^2} = \frac{1}{x}.$$

Beh 2: Es ist $f(0) = 0$ und $K = \mathbb{R}$.

BW.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Deshalb ist $f(0) = 0$ und $0 \in K$. Wegen Beh.1 ist $K = \mathbb{R}$.

Beh 3: Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ ist für alle $a \in \mathbb{R}^+$ auf $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$ gleichmäßig konvergent.

BW.: Es ist für alle x mit $|x| \geq a$ stets

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2} - \frac{1}{x} \right| \\ &= \frac{1}{|x|(1 + n^2 x^2)} \\ &\leq \frac{1}{a(1 + n^2 a^2)} \\ &< a^{-3} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R} \setminus (-a, a)} |f_n(x) - f(x)| \leq a^{-3} \frac{1}{n^2}.$$

Das Einschließungskriterium für Folgen zeigt, daß der Ausdruck in der Mitte gegen Null konvergiert, also die Konvergenz tatsächlich auf $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$ gleichmäßig ist.

Beh 4: Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein I mit $x \in I$ und $\{f_n\}$ gleichmäßig konvergent gegen f auf I .

BW.: Ein Intervall I um x ist eines mit x im Inneren, also von der Form $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ oder (a, b) mit $a < x < b$. Es sei $x \neq 0$, so wählt man (z.B.) für negatives x als entsprechendes Intervall $I := (-\infty, \frac{x}{2}]$ und für positives x definiert man $I := [\frac{x}{2}, \infty)$. Für $a := \frac{x}{2}$ zeigt Beh.3 die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_n\}$ gegen f auf I .

Beh 5: Zu $x = 0$ gibt es kein I um 0, in welchem die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig konvergent ist.

BW.: Indirekt. Angenommen die Beh. ist falsch. Dann gibt es ein Intervall der Form $I := [-\epsilon, \epsilon]$, auf dem die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Wegen des Satzes (von Weierstraß) auf Seite 81:

Die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ einer Folge auf einer Teilmenge M von \mathbb{R} stetiger Funktionen $\{f_n\}$, welche auf M gleichmäßig konvergiert, ist stetig.

muß die Funktion f an der Stelle $x = 0$ stetig sein. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist aber auf $I \setminus \{0\}$ nicht beschränkt, also ist f auf I nicht beschränkt, somit erst recht nicht stetig, ein Widerspruch.