

1 Angabe

Für die Funktionenfolge $\{f_n\}$, die durch $f_n(x) := \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist, bestimme man den Konvergenzbereich, sowie dort die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Für welche reellen $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein (hinreichend kleines) Intervall I mit x im Inneren des Intervalls I und f_n auf I gleichmäßig konvergent?

2 Lösung

Es sei K die Bezeichnung für den Konvergenzbereich, d.i., die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $\{f_n\}$ konvergent (gegen f).

Beh 1: Es ist $D(f_n) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{n}\}$. Weiters ist f_n genau auf $K = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gegen die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 1$, falls $x = 0$ und $f(x) = 0$, falls $x \in K \setminus \{0\}$.

BW.: Ist $x = 0$, so findet man $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, also $f(0) = 1$.

Weiters, falls $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ und $x \neq 0$ ist, so kann die Folge $\{f_n(x)\}$ gebildet werden (man sagt, sie ist wohldefiniert) und es ist, Rechenregeln für konvergente Folgen vorexerzierend:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{1}{n} + x} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + x} \right) \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + x} \right) = 0 \cdot \frac{1}{0+x} = 0, \end{aligned}$$

also $f(x) = 0$. Der Grenzwert existiert für jedes $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, welches somit mit K übereinstimmt.

Beh 2: Sei $x > 0$, so ist Folge $\{f_n\}$ auf $I := [\frac{x}{2}, \infty)$ gleichmäßig konvergent.

BW.: Zunächst hat man für alle $\xi \geq \frac{x}{2}$ die Abschätzung

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| = \frac{1}{1+n\xi} < \frac{1}{n\xi} < \frac{1}{n\frac{x}{2}} = \frac{2}{nx}.$$

Deshalb ist

$$0 \leq \sup_{\xi \in I} |f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{2}{nx}$$

zwischen zwei Nullfolgen eingeschlossen, konvergiert also selbst gegen Null, sodaß die gleichmäßige Konvergenz auf I folgt.

Beh 3: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1})$ sei $I := [a, b]$ mit $a := -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}(x - (-\frac{1}{n}))$ und $b := -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{n+1} - x)$. Dann ist $\{f_n\}$ auf I gleichmäßig gegen f konvergent.

(bitte Skizze selbst anfertigen, um zu sehen, daß a der "Halbierungspunkt" zwischen $-\frac{1}{n}$ und x , sowie b jener zwischen x und $-\frac{1}{n+1}$ ist.)

BW.:

Laut Konstruktion ist

$$-\frac{1}{n} < a < x < b < -\frac{1}{n+1}.$$

Hieraus ergibt sich für alle $\xi \in [a, b]$ für die Nenner von $f_k(\xi)$

$$1 - \frac{k}{n} < 1 + ka \leq 1 + k\xi \leq 1 + kb < 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Geht man für $k > n+1$ zum Kehrwert über, so sind alle Terme negativ und man bekommt

$$f_k(a) \leq f_k(\xi) \leq f_k(b),$$

woraus

$$f_k(a) \leq \sup_{\xi \in I} f_k(\xi) \leq f_k(b)$$

folgt, sodaß der Ausdruck in der Mitte zwischen zwei Nullfolgen eingeschlossen ist. Deshalb konvergiert $\sup_{\xi \in I} f_k(\xi)$ gegen Null, sodaß die gleichmäßige Konvergenz gezeigt ist.

Beh 4: Ist $x < -1$ so konvergiert die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $I := (-\infty, \frac{x}{2})$.

BW.: ähnlich zu jenem von Beh.2.

Beh 5: Zu jedem $x \in K$ existiert ein I mit x im Inneren von I und $\{f_n\}$ auf I gleichmäßig konvergent gegen f .

BW.: Konsequenz von Beh.2-4.