

1 Angabe

Bestimmen Sie für die Folge

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 3}$$

den Grenzwert a und geben Sie zu $\epsilon = 10^{-3}$ und $\epsilon = 10^{-5}$ ein $N(\epsilon)$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$ an.

2 Lösung

Die Folge a_n lässt sich nach elementarer Umformung in der Form

$$a_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{3}{n}}$$

anschreiben. Nun sieht man sich Zähler und Nenner zunächst getrennt an, um danach Regel 3 auf Seite 41 anzuwenden zu können.

Beh.1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$.

BW: Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ (konstante Folge). Da der Quotient einer beschränkten (im Beispiel $\{3\}$) und einer nach $+\infty$ divergenten Folge (hier $\{n\}$) nach 0 konvergiert (Regel 5 auf Seite 48), ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. Danach folgt Beh.1, da die Summe der konvergenten Folgen $\{1\}$ und $\{\frac{3}{n}\}$ gegen die Summe der Limiten konvergiert (Regel 3 auf Seite 40).

Beh.2: *Es ist* $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$.

BW: Zunächst argumentiert man ähnlich wie unter Beh1. Es durchaus üblich, die Argumentation durch Anschreiben sukzessiver Umformungen der linken Seite von Beh.2. und kommentieren, welche Regeln man ver-

wendet hat, aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} && \text{Anwendung von } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, \text{ sofern der GW unter} \\
 &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} && \text{der Wurzel existiert (hier ist } k=2 \text{ und} \\
 &= \sqrt{1+0} && a_n = 1 + \frac{1}{n^2} \geq 0, \text{ wie gefordert).} \\
 &= 1 && \text{die Summe konvergenter Folgen kon-} \\
 & && \text{vergiert gegen die Summe der Limiten} \\
 & && \text{(Regel 3 S.40)} \\
 & && \text{weil die vordere Folge konstant ist, und} \\
 & && \text{weil die zweite Folge Quotient einer} \\
 & && \text{konvergenten, und somit beschränkten,} \\
 & && \text{und einer gegen } +\infty \text{ konvergenten} \\
 & && \text{Folge ist (Regel 5 auf S.48 mit } b_n = 1 \\
 & && \text{und } c_n = n^2) \\
 & && \text{die obere der beiden 'sofern' Bedin-} \\
 & && \text{gungen ist auch erfüllt.}
 \end{aligned}$$

Beh.3: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

BW: Wie angekündigt, verwendet man, daß der Quotient zweier konvergenter Folgen gegen den Quotienten der Limiten konvergiert, sofern die Folge im Nenner als auch ihr GW nicht verschwinden (Regel 3 auf S.41 mit $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ und $b_n = 1 + \frac{3}{n}$), sowie Behauptungen 1 und 2.

Nun zum zweiten Teil der Aufgabe. Hier sei gesagt, daß man beim Finden von $N(\epsilon)$ zumindest in diesem Beispiel nicht 'Weltmeister' werden muß. Deshalb dürfen wir

$$|a_n - a|$$

zunächst durch einen 'einfacheren' Ausdruck nach oben abschätzen, der natürlich gegen Null konvergieren sollte.

Beh.4: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - 1| < \frac{3}{n+3}$.

BW:

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{3}{n}} && \text{Einfache Zusatzüberlegung, soll hier} \\
 &&& \text{nicht vorgeführt werden, aber bitte sel-} \\
 &&& \text{ber 'ausklamüsern' (sorgfältig die ver-} \\
 &&& \text{wendeten Regeln dokumentieren!)} \\
 &< 1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{n}} && \text{Verkleinern des Zählers verkleinert} \\
 &&& \text{den Bruch - es wird weniger von 1} \\
 &&& \text{abgezogen} \\
 &= \frac{3}{n+3} && \text{elementare Umformung}
 \end{aligned}$$

Beh.5: Für $\epsilon > 0$ reicht $N(\epsilon) := \left\lceil \frac{3}{\epsilon} \right\rceil - 2$

BW: Die Folge $\frac{3}{n+3}$ ist monoton fallend, deshalb kann $N(\epsilon)$ durch die Bedingung

$$\frac{3}{N(\epsilon) + 3} \leq \epsilon$$

(unsere Folge $\frac{3}{n+3}$ ist strikte obere Schranke für $|a_n - 1|$) gefunden werden. Anwendung der Monotoniegesetze führt auf Beh.5.