

1 Angabe

Geben Sie eine Formel für die Summanden an und untersuchen Sie die angegebene Reihe auf Konvergenz (betrachten Sie, falls nötig, zuerst eine Teilfolge der Teilsummenfolge):

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots$$

2 Lösung

Das ‘Formelfinden’ ist der Intuition überlassen. Es fällt auf, daß als Nenner der Reihe nach natürliche Zahlen durchlaufen werden. Wenn der Nenner ein Vielfaches von 3 ist, so ist das Vorzeichen negativ. Somit findet man $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor}}{n}.$$

Der ‘Beweis’ erfolgt durch Überprüfen für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (mehr ist schließlich nicht aus der Angabe ablesbar!)

Um die Divergenz der Reihe nachzuweisen, definieren wir $S_N := \sum_{n=1}^N a_n$ und verwenden die Abschätzung

$$S_{3N} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

durch die N .te Partialsumme der harmonischen Reihe (der negative Term wurde zu $\frac{1}{n+1}$ ‘vergrößert’, um nach unten abschätzen zu können). Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{3N} = \infty$$

und die Reihe ist divergent.