

## 1 Angabe

Siehe Angabebblatt.

## 2 Lösung

Der Fehler steckt im Induktionsschluß:

Verwenden möchte man folgenden Sachverhalt im angeordneten Körper  $\mathcal{Q}$ :

$$(\forall a \in \mathcal{Q})(\forall b \in \mathcal{Q})(\forall c \in \mathcal{Q})(\forall d \in \mathcal{Q}) \\ (0 \leq a < b) \wedge (0 \leq c < d) \Rightarrow ac < bd \quad (*)$$

und sollte beachten, daß für negatives  $a$  oder  $c$   $(*)$  sehr wohl falsch sein kann.

Die Anwendung dessen ist im Induktionsschluss geplant, wenn aus

$$a_k < 2 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} i^2$$

(aufgrund der Induktionsannahme ist die Ungleichung für  $k$  erfüllt) mit  $a := a_k$ ,  $b := \prod_{i=0}^{k-1} i^2$ ,  $c := k^2 - 11k + 29$  und  $d := (k+5)^2$  durch Anwendung von  $(*)$  auf

$$a_{k+1} < 2 \cdot \prod_{i=0}^k i^2$$

geschlossen werden soll. Dabei wird übersehen, daß  $(*)$  unter der Bedingung  $0 \leq k^2 - 11k + 29$  gilt (und, wie oben schon bemerkt, andernfalls  $(*)$  falsch sein kann). Diese Bedingung ist für

$$k \in \{1, 2, 3, 4\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 7\}$$

erfüllt.

Fazit: Für  $k = 5, 6$  ist der Induktionsschluss in der angegebenen Weise nicht machbar.

*Zusatzfrage(n): Ist die Behauptung richtig? Inwieweit ist der angegebene Induktionsbeweis verwendbar?*

Man kann von  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  schliessen, und stellt fest, daß man den Induktionsanfang für  $n = 6$  separat sich überlegen muß. Danach ist die 'Lücke' geschlossen.