

## 1 Angabe

Man bestimme alle lokalen Extrema der Funktion  $f(x) := \sqrt{1 - \cos x}$ .

## 2 Lösung

Es ist sinnvoll, den “Aufbau” der Funktion als Komposition der stetig differenzierbaren Funktion  $1 - \cos x$  und der streng monotonen Wurfelfunktion sich zu Nutzen zu machen.

**Beh 1:** *Die Funktion ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert. Sie hat genau dann ein globales Maximum, wenn  $\cos x$  ein globales Minimum hat. Entsprechendes gilt für Minima.*

Bew: Der Ausdruck unter der Wurzel wird niemals negativ und ist für alle reellen  $x$  sinnvoll. Die Wurfelfunktion ist streng monoton wachsend auf  $[0, \infty)$ . Deshalb stimmen die Stellen  $x$ , an denen  $f$  ein globales (bzw. lokales) Maximum hat, genau mit den Stellen überein, wo dies für den Radikanden zutrifft. Für diesen wiederum liegt ein globales (lokales) Maximum genau dann vor, wenn  $\cos x$  ein globales (lokales) Minimum besitzt.

**Beh 2:** *Der Kosinus hat globale Maxima genau an den Stellen  $x = 2k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und Wert 1. Er hat globale Minima genau an den Stellen  $(2k+1)\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und Wert  $-1$ . Jedes seiner lokalen Extrema ist zugleich globales Extremum.*

Bew: Genau an den angegebenen Stellen nimmt der Kosinus die Werte  $\pm 1$  an, und da er betragsmäßig durch 1 beschränkt ist, liegen Stellen mit globalem Extremum vor. Um zu zeigen, daß jedes lokale Extremum zugleich global ist, kann die DR herangezogen werden: Da  $\cos x$  stetig differenzierbar ist, muß an jeder lokalen Extremstelle  $x$  die Ableitung, also  $\sin x$  verschwinden. Das ist genau an den Stellen  $l\pi$  mit  $l \in \mathbb{Z}$  der Fall. Es ergeben sich somit keine neuen Extremstellen.

**Beh 3:** *Die Funktion  $f$  nimmt den Wert 0 als globales Minimum genau an den Stellen  $x = 2k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  an. Sie nimmt den Wert 2 als globales Maximum genau an den Stellen  $x = (2k+1)\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  an.*

Bew: Folgerung aus Beh.1 und 2.