

1 Angabe

Zeigen Sie, daß in jedem angeordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ für alle Teilmengen A, B von K mit $A \cup B \subseteq K^+$ für welche $\inf A$ und $\inf B$ existieren, für die Menge $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ das Infimum $\inf(AB)$ existiert und $\inf(AB) = \inf A \inf B$ gilt.

2 Lösung

Beh 1: $\inf A \inf B \geq 0$ und $\inf A \inf B$ ist untere Schranke von AB .

Beweis: Sei $a \in A$ und $b \in B$ beliebig. Dann ist $\inf A \leq a$ und $\inf B \leq b$. Da $A \cup B \subseteq K^+$ gilt $0 \leq \inf A$ und $0 \leq \inf B$, somit $\inf A \inf B \geq 0$ und schliesslich

$$\inf A \inf B \leq ab$$

aufgrund der Monotoniegesetze der Anordnung.

Beh 2: Sei c eine untere Schranke von AB . Dann ist $c \leq \inf A \inf B$.

Beweis: (indirekt) Angenommen Beh 2 ist falsch. Dann

$$\exists c \in K, \forall a \in A, \forall b \in B: c \leq ab \quad \text{and} \quad \inf A \inf B < c. \quad (1)$$

Wegen Beh 1 gilt dann $c > 0$. Ist $\epsilon \in K^+$ beliebig, so folgt aus der Definition des Infimums die Existenz von $a_\epsilon \in A$ und $b_\epsilon \in B$ mit

$$\begin{aligned} \inf A + \epsilon &\geq a_\epsilon \\ \inf B + \epsilon &\geq b_\epsilon, \end{aligned}$$

woraus durch Multiplikation die Aussage

$$\forall \epsilon \in K^+ : \inf A \inf B + \epsilon(\inf A + \inf B) + \epsilon^2 \geq c \quad (2)$$

folgt.

(Kommentar: Nun wäre man glücklich zu sagen, 'Na ja, wenn ϵ gegen Null geht, dann kriegt man 'irgendwie' $\inf A \inf B \geq c$, im Widerspruch zu Eq.(1), und dann 'paßt ja alles'. Dies ist zwar 'intuitiv O.K.', wir müssen jedoch versuchen, Beh 2 einzig und allein aus den Axiomen des angeordneten Körpers herzuleiten. Dementsprechend ist weder klar, ob 'Grenzwerte' existieren, noch ob 'quadratische Gleichungen gelöst werden können' (um sich z.B. 'kunstvoll ein ϵ auszurechnen'!))

Da $1 \in K^+$ hat man für $\epsilon \leq 1$ stets $\epsilon \geq \epsilon^2$, sodaß aus Eq.(2) die Aussage

$$\forall \epsilon, \quad 0 < \epsilon \leq 1: \quad \inf A \inf B + \epsilon(\inf A + \inf B + 1) \geq c \quad (3)$$

Wählt man hierin nun (es ist ja immerhin $c - \inf A \inf B > 0$ und somit sucht man ein ϵ , das ‘so klein ist’, daß $\epsilon(\inf A + \inf B + 1)$ kleiner als $(c - \inf A \inf B)$ wird, um auf einen Widerspruch zu kommen – bitte sich selbst eine Skizze machen, um die Intuition hinter diesem Gedankengang zu wecken!):

$$\epsilon := \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{c - \inf A \inf B}{\inf A + \inf B + 1} \right\}$$

so ergibt sich hieraus durch etwas Umformung

$$\inf A \inf B \geq c,$$

sichtlich im Widerspruch zu Eq.(1). Somit gilt Beh2.

Beweisende: Aus Beh 1 und Beh 2 folgt mittels der Definition des Infimums (von AB) die Aussage des Beispiels.

Noch als Nachsatz: Man muß sich klarmachen, daß es im angeordneten Körper möglich ist, Ausdrücke der Form $\frac{1}{2}x$ für jedes $x \in K$ zu bilden (immerhin ‘multipliziert’ man eine rationale Zahl mit einem Körperelement) und daß z.B:

$$(\forall x \in K^+)(\forall n \in \mathbf{N}) \quad \frac{1}{n}x < x$$

gilt. Wegen Beispiel 64 ist zunächst $n \cdot 1_K \neq 0_K$ (zur Erinnerung: $1 \cdot 1_K := 1_K$, $(n+1) \cdot 1_K := n \cdot 1_K + 1_K$; hierin sind 1_K und 0_K Eins- und Nullelement in K). Sind nun $p, q \in \mathbf{Z}$ und $q \neq 0$, so setzt man (als einfachere Schreibweise)

$$\frac{p}{q} 1_K := \frac{p 1_K}{q 1_K}.$$

Beachtet man, daß für alle $m, n \in \mathbf{Z}$ die Gleichung $(mn)1_K = (m1_K)(n1_K)$ gilt, so zeigt man, daß die $\frac{p}{q} 1_K$ wohldefiniert ist (nicht vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse $\frac{p}{q}$ abhängt!). Somit ist

$$\frac{1}{2}x = \frac{1_K}{2 \cdot 1_K}x$$

für $x \in K$ sinnvoll. Im Rahmen der Algebravorlesung wird das so formuliert:

Satz: Zu jedem Körper K der Charakteristik Null (d.h. es darf nicht $n1_K = 0$ für ein $n \in \mathbf{N}$ gelten) ist die Abbildung

$$\frac{p}{q} \mapsto \frac{p 1_K}{q 1_K}$$

ein Körperisomorphismus von \mathbf{Q} auf einen Teilkörper von K . Weiters ist $\frac{p 1_K}{q 1_K} > 0$ für alle $p, q \in \mathbf{N}$.

Der Körper \mathbf{Q} kann somit als Teilkörper von K betrachtet werden, auf welchem die Anordnung in K die natürliche \mathbf{Q} -Anordnung ‘induziert’.