

1 Angabe

Für welche a_1 ist durch die Rekursion $a_{n+1} := \sqrt{2a_n^2 + 4a_n - 3}$ eine unendliche Folge definierbar? Für welche Startwerte konvergiert die Folge (auch uneigentliche GW sind in Betracht zu ziehen).

2 Lösung

Beh 1: Für $a_1 \in (-1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{10}}{2})$ ist a_2 nicht definiert.

BW.: Es ist $2x^2 + 4x - 3 = 2(x^2 + 2x - \frac{3}{2}) = 2((x+1)^2 - \frac{5}{2}) = 2(x+1 + \sqrt{\frac{5}{2}})(x+1 - \sqrt{\frac{5}{2}})$ und dieser Ausdruck ist nichtnegativ, genau dann wenn die beiden x enthaltenden Faktoren das gleiche Vorzeichen haben, bzw. einer der beiden verschwindet. Geometrisch bedeutet dies, daß $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ eine Parabel mit Scheitel in $(-1, -5)$ und Nullstellen an den oben genannten Intervallgrenzen hat (Skizze!). Deshalb ist $f(x) < 0$ für $x \in (-1 - \sqrt{\frac{5}{2}}, -1 + \sqrt{\frac{5}{2}})$. Somit darf a_1 nicht in diesem Intervall gewählt werden, sonst ist a_2 nicht definiert.

Beh 2: Falls die Folge einen GW $a \in \mathbb{R}$ besitzt, so ist $a = -2 + \sqrt{7}$. Es ist $-1 + \frac{10}{2} < a$.

Aus der Rekursion folgt $a_{n+1}^2 = 2a_n^2 + 4a_n - 3$ und Anwenden der GW-Regeln (vgl. eine detailliertere Form der Protokollierung in Bspl. 163) ergibt für a die Gleichung

$$a^2 = 2a^2 + 4a - 3.$$

Da ab $n \geq 2$ alle Glieder der Folge nichtnegativ sind, scheidet die negative Lösung aus. Die zweite Behauptung kann durch Äquivalenzumformungen gezeigt werden.

Beh 3: Es sei $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x - 3}$. Es ist $x > a$ gleichbedeutend zu $f(x) > x > 0$. Weiters ist unter der Bedingung $x \geq 0$ die Ungleichung $x < a$ gleichbedeutend zu $f(x) < x$.

BW.: $f(x) > x > 0$ kann durch Äquivalenzumformungen in

$$(x+2)^2 - 7 > 0$$

umgeformt werden. Hieraus ergibt die Annahme $x > 0$ durch Äquivalenzumformung $x > a$, wie behauptet. Die andere Behauptung geht analog.

Beh 4: Ist $a_1 = a$, so ist $\{a_n\}$ konvergent gegen a .

BW.: Die Folge erweist sich als konstant, d.h. $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beh 5: Ist $a_1 > a$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a = +\infty$.

BW.: Die Folge ist wegen Beh.3 streng monoton wachsend. Wäre sie beschränkt, müßte sie wegen Beh.2 gegen $a < a_1$ konvergieren, ein Widerspruch.

Beh 6: Ist $0 \leq a_1 < a$, so ist die Folge nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

BW.: Falls es so wäre, wäre sie nach unten wegen Beh.1 durch Null beschränkt, müßte also gegen $a > a_1$ konvergieren, ein Widerspruch.

Beh 7: Ist $a_1 \leq -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$. Dann ist $a_2 > a$ genau dann, wenn $a_1 < \zeta := \frac{3}{2} - 4\sqrt{7}$ ist. Es ist für $a_1 = \zeta$ der Wert von $a_2 = a$ und für $a_1 > \zeta$ ist die Folge nicht für alle n definiert.

BW.: Wegen Beh.1 ist $2a_1^2 + 4a_1 - 3 \geq 0$. Danach ergibt sich alles Weitere wegen $a_2 \geq 0$ aus Beh.3 und Äquivalenzumformung von

$$\sqrt{2a_1^2 + 4a_1 - 3} > a.$$

3 Ergebnis

Für $a_1 \in (-\infty, \frac{3}{2} - 4\sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}, \infty)$ ist die Folge für alle n definiert und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a = +\infty$. Für alle anderen Wahlen von a_1 ist die Folge nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.