

1 Angabe

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{2}{n(n+2)(n+4)}$, indem Sie a_n als Summe von Ausdrücken der Gestalt $\frac{z_k}{n+k}$ mit $k \in \{0, 2, 4\}$ und geeigneten $z_k \in \mathbb{Q}$ darstellen.

2 Lösung

Beh 1: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{4n} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{4(n+4)}$

BW: Zunächst bildet man den unbestimmten Ansatz

$$\frac{2}{n(n+2)(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+4}.$$

Nun kann man entweder alles auf einen Nenner bringen und Koeffizientenvergleich machen, oder, etwas ‘intelligenter’, man multipliziert alles mit n und setzt danach $n = 0$. Die Terme mit $(n+2)$ und $(n+4)$ fallen weg, und man liest sofort $A = \frac{1}{4}$ ab. etc.

(Die Anleitung läuft auf *Partialbruchzerlegung* von a_n hinaus, mehr davon später.)

Intuition: Schreibt man nun die Reihe in der Form

$$\begin{array}{cccc|cccccc} \frac{1}{4 \cdot 1} & & & -\frac{1}{2 \cdot 3} & +\frac{1}{4 \cdot 5} & & & & & \\ & +\frac{1}{4 \cdot 2} & & -\frac{1}{2 \cdot 4} & +\frac{1}{4 \cdot 6} & & & & & \\ & & +\frac{1}{4 \cdot 3} & +\frac{1}{4 \cdot 4} & -\frac{1}{2 \cdot 5} & +\frac{1}{4 \cdot 7} & & & & \\ & & & & -\frac{1}{2 \cdot 6} & & +\frac{1}{4 \cdot 8} & & & \\ & & & & +\frac{1}{4 \cdot 5} & -\frac{1}{2 \cdot 7} & & +\frac{1}{4 \cdot 9} & & \\ & & & & & +\vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

so vermutet man, daß sich der Wert der Reihe als Summe der Elemente in den ersten vier Spalten ergibt, weil sich danach alle Terme ‘wegheben’.

Im 18. Jahrhundert wurde diese Denkweise noch akzeptiert, weil der Grenzwertbegriff noch nicht existierte. Dies führte zu mannigfachen Disputen über die ‘korrekte Form’ die ‘unendliche Summe’ zu ‘bestimmen’. Deshalb verwendet man heute als Definition der ‘Reihensumme’

$$S := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N, \quad S_N := \sum_{n=1}^N a_n,$$

und muß somit den Grenzwert der Reihe als Grenzwert der Partialsummenfolge $\{S_N\}$ bestimmen.

Um eine passende Form für S_N zu erraten, schreiben wir die letzten 5 Terme in der obigen Form für $N \geq 5$ auf:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 +\frac{1}{4.(N-4)} & & -\frac{1}{2.(N-2)} & & +\frac{1}{4.N} & & & & \\
 & +\frac{1}{4.(N-3)} & & -\frac{1}{2.(N-1)} & & +\frac{1}{4.(N+1)} & & & \\
 & & +\frac{1}{4.(N-2)} & & -\frac{1}{2.N} & & +\frac{1}{4.(N+2)} & & \\
 & & & +\frac{1}{4.(N-1)} & & -\frac{1}{2.(N+1)} & & +\frac{1}{4.(N+3)} & \\
 & & & & +\frac{1}{4.N} & & -\frac{1}{2.(N+2)} & & +\frac{1}{4.(N+4)}
 \end{array}$$

Links vom senkrechten Strich bleiben nach Kürzung (Teleskopeffekt) die obigen 6 Terme stehen. Rechts vom Strich wird nicht vollständig weggekürzt und man kommt zu folgender Behauptung:

Beh 2: Für alle $N \geq 5$ ist

$$\begin{aligned}
 s_N &= \sum_{k=1}^N a_n \\
 &= \frac{1}{4.1} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{4.4} \\
 &\quad + \frac{1}{4.(N+1)} + \frac{1}{4.(N+2)} - \frac{1}{2.(N+1)} + \frac{1}{4.(N+3)} - \frac{1}{2.(N+2)} + \frac{1}{4.(N+4)}.
 \end{aligned}$$

BW: Für $N = 5$ liest man die Behauptung aus der obigen Darstellung ab. Nun liefert vollständige Induktion die Behauptung.

Beh 3: $S := \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \frac{1}{4.1} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{4.4} = \frac{11}{48}$

BW: S_N ist als Linearkombination konstanter Folgen und Nullfolgen gleich der entsprechenden Linearkombination der Grenzwerte.

Nachbemerkung: So sehr der Intuition ‘gehuldigt’ worden ist, es gibt effizientere Techniken um die obige Formel für S_N zu bekommen und der ‘Teleskopeffekt’ wird dabei ebenfalls sichtbar:

$$\begin{aligned}
 S_N &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{4(n+4)} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2(n+2)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{4(n+4)} \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{2n} + \sum_{n=5}^{N+4} \frac{1}{4n} \\
 &= \sum_{n=1}^4 \frac{1}{4n} - \sum_{n=3}^4 \frac{1}{2n} + \sum_{n=N+2}^{N+4} \frac{1}{4n} \\
 &\quad - \sum_{n=N+1}^{N+2} \frac{1}{2n} + \sum_{n=N+1}^{N+4} \frac{1}{4n} \\
 &= \frac{11}{48} - \frac{1}{2.(N+1)} - \frac{1}{2.(N+2)} + \frac{1}{4.(N+1)} + \frac{1}{4.(N+2)} + \frac{1}{4.(N+3)} + \frac{1}{4.(N+4)}.
 \end{aligned}$$

Keine Kürzung findet in jeder Summe für Terme mit $n \leq 4$ bzw. $n \geq N+1$ statt.

Vorteil: Man muß die Summenformel S_N nicht ‘erraten’. Der Umgang mit dem Indexverschieben bei Summationen zählt außerdem zum Standard.