

1 Angabe

Gegeben sind Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ durch $a_n := \frac{1}{n^2(n+1)}$ und $b_n := \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Man zeige, daß $s := \sum_{a=1}^{\infty} a_n$ und $t := \sum_{b=1}^{\infty} b_n$ existieren. Man ermittle $k \in \mathbb{N}$ derart, daß bei Ersetzen von s durch $t + \sum_{n=1}^k c_n$ der Fehler höchstens ein Zehntel von jenem ist, der entsteht, wenn s durch $\sum_{n=1}^k a_n$ ersetzt wird.

2 Lösung

Der erste der beiden Fehler ist

$$\delta_k := s - \left(t + \sum_{n=1}^k c_n\right),$$

der zweite ist

$$\Delta_k := s - \sum_{n=1}^k a_n.$$

Gesucht ist k , derart daß

$$|\delta_k| \leq \frac{1}{10} |\Delta_k| \quad (*)$$

gilt. Im Beispiel sind alle a_n , b_n und c_n positiv, sodaß $\delta_n \geq 0$ and $\Delta_n \geq 0$ (bitte selbst prüfen!). Deshalb erweist sich $(*)$ als äquivalent zu

$$s - t - \sum_{n=1}^k c_k \leq \frac{1}{10} \left(s - \sum_{n=1}^k a_n\right).$$

Da $c_n = a_n - b_n$, ist Letzteres auch in der Form

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n - \sum_{n=k}^{\infty} b_n \leq \frac{1}{10} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n\right)$$

anschreibbar, bzw., nach weiterer Umformung mittels der Monotoniegesetze,

$$\sum_{n=k}^{\infty} b_n \geq \frac{9}{10} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n\right).$$

Nun sollte es reichen, wenn für alle $n \geq k$ stets jedes einzelne Folgenglied die Ungleichung

$$b_n \geq \frac{9}{10} a_n$$

erfüllt. Letzteres ist für $n \geq k$ zu

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \geq \frac{9}{10} \frac{1}{n^2(n+1)},$$

bzw. zu

$$10(n+1) \geq 9(n+2),$$

m.a.W. zu $n \geq 8$ für alle $n \geq k$ äquivalent.

Ergebnis: *Es ist somit 8 eine obere Schranke für ein minimales k , für welches (*) gilt.*