

1 Angabe

Falls man weiß, daß $x \in [a, b]$ und $y \in [c, d]$ liegen, welche (bestmöglichen) Schranken können für $z = \frac{x}{y}$ angegeben werden. Es soll $a < b$ und $c < d$ angenommen werden.

2 Lösung

Sind $I := [a, b]$ und $J := [c, d]$ so ist zweifelsfrei $I \cup J \subseteq \mathbb{R}^+$ der einfachste Fall. Beh. 1 – 4 behandeln die Fälle, wo I, J jeweils nur positive bzw. nur negative Zahlen enthält. In Beh. 5 und 6 lassen wir $0 \in I$ zu. In Beh. 7 und 8 wird $0 \in (c, d)$ und I aus lediglich positiven oder negativen Zahlen bestehend behandelt. Schließlich, wenn $0 \in (a, b)$ und $0 \in (c, d)$ gilt, so kann $\frac{x}{y}$ jeden reellen Wert annehmen.

Beh 1: Sind $0 < a$, und $0 < c$, so nimmt z jeden Wert in $[\frac{a}{d}, \frac{b}{c}]$ an. Ist $c = 0$, so ist recht $+\infty$ zu setzen.

BW.: Aus $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ folgt durch Anwendung der Monotoniegesetze

$$\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}.$$

Nochmals Anwenden der Monotoniegesetze ergibt

$$\frac{a}{d} \leq z \leq \frac{b}{c}.$$

Der Nachsatz ergibt sich in ähnlicher Weise.

Beh 2: Ist $0 < a$ und $d < 0$ so nimmt z jeden Wert in $[\frac{b}{d}, \frac{a}{c}]$ an. Ist $d = 0$, so ist links $-\infty$ zu setzen.

BW. Man führt diesen Fall auf den vorigen zurück. Setzt man $y = -\eta$, so ist $x \in [a, b]$ und $\eta \in [-d, -c]$. Somit ist wegen Beh.1 $-z \in [\frac{a}{-c}, \frac{b}{-d}]$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Beh 3: Ist $b < 0$ und $0 < c$, so nimmt z jeden Wert in $[\frac{a}{c}, \frac{b}{d}]$ an. Ist $c = 0$, so ist links $-\infty$ zu setzen.

BW. Analog.

Beh 4: Ist $b < 0$ und $d < 0$, so nimmt z jeden Wert in $[\frac{b}{c}, \frac{a}{d}]$ an. Ist $d = 0$, so ist rechts $+\infty$ zu setzen.

BW. Analog wie Beh. 2.

Beh 5: Ist $0 \in [a, b]$ und $c > 0$, so ist $z \in [\frac{a}{c}, \frac{b}{c}]$.

BW. Wenn $x \in [a, 0]$, so ergibt sich aus Beh. 3 die Eingrenzung $z \in [\frac{a}{c}, 0]$ und für $x \in [0, b]$ aus Beh. 1 die Eingrenzung $z \in [0, \frac{b}{c}]$. Da $\frac{a}{c} \leq 0$ ist, ergibt sich die Behauptung.

Beh 6: Ist $0 \in [a, b]$ und $d < 0$, so nimmt z jeden Wert in $[\frac{b}{d}, \frac{a}{d}]$ an. Ist $d = 0$, so ist für $0 \in (a, b)$ das Intervall durch \mathbb{R} zu ersetzen. Ist $a = 0$, so ist das Intervall $(-\infty, 0]$ und ist $b = 0$, so ist es $[0, \infty)$.

BW. Wie in Beh. 2 setzen wir $\eta = -z$ und bekommen aus Beh. 5 für $c \rightarrow -d$ und $d \rightarrow -c$ die Eingrenzung $-z \in [\frac{a}{-d}, \frac{b}{-d}]$, aus der die Behauptung folgt.

Beh 7: Ist $0 \in (c, d)$ und $0 < a$, so ist $z \in (-\infty, \frac{a}{c}] \cup [\frac{a}{d}, \infty)$.

BW. Wenn $y \in [c, 0]$ ist, findet man aus Beh. 2 die Eingrenzung $z \in (-\infty, \frac{a}{c}]$ und aus Beh. 1 bekommt man für $y \in [0, d]$ das zweite Intervall.

Beh 8: Ist $0 \in (c, d)$ und $b < 0$, so ist $z \in (-\infty, \frac{b}{d}] \cup [\frac{b}{c}, \infty)$.

BW. Wiedereinmal muß $\eta := -y$ erhalten. Dann ergibt Beh. 7 wegen $\eta \in [-b, -a]$ und $0 < -b$ die Eingrenzung

$$-\frac{x}{y} = \frac{x}{\eta} \in (-\infty, \frac{-b}{c}] \cup [\frac{-b}{d}, \infty),$$

aus der die Behauptung folgt.

Beh 9: Ist $0 \in (c, d)$ und $0 \in [a, b]$, so kann z jeden reellen Wert annehmen.

BW. Folgerung aus Behauptungen 7 und 8.

Nachsatz. Aus der Angabe entnimmt man, daß x und y mit kleinen Fehlern behaftet sind. Dies kann als Motivation dienen, y lediglich strikt positiv oder strikt negativ anzunehmen. Die Antworten sind in diesem Fall die Behauptungen 1 – 6, und man darf $cd \neq 0$ annehmen!