

1 Angabe

Es sei T Teilmenge von A und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Wie können $f(C_A(T))$, $C_{f(A)}(f(T))$ und $C_B(f(T))$ zueinander liegen, insbesondere wenn f injektiv, bzw. surjektiv ist.

2 Lösung

Beh 1: Es ist $C_{f(A)}(f(T)) = f(C_A(T)) \cap C_B(f(T))$.

BW.: durch folgende Kette von Schlüssen:

$$\begin{aligned} y \in C_{f(A)}(f(T)) &\Leftrightarrow (y \notin f(T)) \wedge (y \in f(A)) \\ &\Leftrightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in C_B(f(T))) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cap C_B(f(T)). \end{aligned}$$

Beh 2: Ist f surjektiv, so ist $C_B(f(T)) = C_{f(A)}(f(T))$.

BW.: Klar, weil ja $f(A) = B$ gilt.

Beh 3: Ist f injektiv, so ist $C_{f(A)}(f(T)) = f(C_A(T))$.

BW.: durch folgende Kette von Schlüssen:

$$\begin{aligned} y \in C_{f(A)}(f(T)) &\Leftrightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \notin f(T)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(C_A(T)) \text{ Injektivität!} \end{aligned}$$

Beh 4: Abhängig von f kann sowohl

1. $f(C_A(T)) \subset C_B(f(T))$ als auch
2. $C_B(f(T)) \subset f(C_A(T))$

gelten.

BW.: Ist $A := \{0\}$, $T := \emptyset$ und $B := \{0, 1\}$, sowie $f(0) := 0$, so ist $C_A(T) = A$, $f(C_A(T)) = f(A) = \{0\}$ und $C_B(f(T)) = C_B(f(\emptyset)) = C_B(\emptyset) = B = \{0, 1\}$, also 1. belegt.

Ist $A := \{0, 1\}$, $T := \{0\}$ und $B := \{0\}$, sowie $f(0) := 0$, so ist $C_A(T) = \{1\}$, $f(C_A(T)) = \{0\}$, sowie $C_B(f(T)) = \emptyset$, also 2. belegt.