

## 1 Angabe

Sei

$$a_{n+1} := (a_n + 2) \frac{1}{a_n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)(1 - a_n).$$

Man untersuche die Konvergenz der Folge in Abhängigkeit vom Startwert  $a_1$ .

## 2 Lösung

Die Lösung besteht in der folgenden Aussage:

*Die Folge divergiert gegen  $+\infty$ , falls  $a_1 > 0$  und gegen  $-\infty$ , falls  $a_1 < 0$  ist.*

**Beh.1:** *Die Folge  $\{a_n\}$  konvergiert für keine Vorgabe vom Startwert  $a_1$ .*

BW: (indirekt). Sei  $a_1$  derart, daß die Folge  $\{a_n\}$  gegen einen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dann folgt aus der Definition der Folge

$$a_n a_{n+1} = (a_n + 2) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n (1 - a_n).$$

Rechenregeln für (in  $\mathbb{R}$ ) konvergente Folgen ergeben die in  $\mathbb{R}$  unlösbare Gleichung

$$a^2 = (a + 2) - (1 + a)a.$$

(Anm.: Durch das Multiplizieren mit  $a_n$  bekommt man den gesuchten Widerspruch – eine in  $\mathbb{R}$  unlösbare Gleichung – unter Umgehung der Diskussion für  $a = 0$ .)

**Beh.2:** *Wenn  $a_1 < 0$ , so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  stets  $a_{n+1} < a_n < 0$ . Die Folge divergiert gegen  $-\infty$ .*

BW: Falls für  $a_n < 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt, hat man die Abschätzung

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + a_n + \frac{a_n - 1}{n} < a_n$$

(und somit  $a_{n+1} < 0$ ), weil vom negativen Term  $a_n$  die negativen Terme  $\frac{2}{a_n}$  und  $\frac{a_n - 1}{n}$  abgezogen werden. Somit ist durch Induktion  $a_n < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  herleitbar. Danach ergibt obige Abschätzung die Aussage  $a_{n+1} < a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also den ersten Teil von Beh.2.

Wegen Beh.1 kann die Folge nicht nach unten beschränkt sein, somit gilt Beh.2, da jede unbeschränkte monoton fallende Folge gegen  $-\infty$  divergiert.

**Beh.3:** Für  $a_1 > 1$  gilt  $a_{n+1} > a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge divergiert gegen  $+\infty$

BW: ähnlich wie Beh.2.

**Beh.4:** Für  $a_1 \in (0, 1]$  ist  $a_2 > 0$

BW: Der Term  $\frac{2}{a_1}$  ist strikt größer als 2,  $a_1 > 0$ , und  $\frac{a_1}{1} \geq -1$ , somit ist  $a_2 > 1$ , wie behauptet.

Aus Beh.2-4 ergibt sich die obige Aussage.