

1 Angabe

Es sei eine Folge $\{a_n\}$ durch

$$a_n := (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$$

gegeben. Man zeige daß $\sum_{a=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und stelle fest, ob auch absolute Konvergenz vorliegt. Bestimmen Sie ein (womöglich recht kleines) k so, daß der Fehler bei der Summation bis k kleiner als 10^{-3} ist. Ist der erhaltene Approximationswert größer oder kleiner als der wahre Wert?

2 Lösung

Intuition: Läßt man die ‘ -1 ’ im Nenner weg (für großes n sollte der Wert von a_n nur ‘sehr geringfügig’ abweichen), so erhält man $a'_n = \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+1}}$, und dieser Reihe sieht man an, daß sie

- alterniert und die Beträge der Glieder eine monotone Nullfolge bilden und aus dem Leibnizkriterium ihre Konvergenz folgt;
- bis auf Anfangsglieder mit der hyperharmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

mit Exponent $c = \frac{1}{2}$ identisch ist, von der man weiß, daß sie divergiert.

Deshalb erhofft man, das gleiche Konvergenzverhalten für die Reihe $\sum_{a=1}^{\infty} a_n$ nachweisen zu können.

Beh 1: Die Reihe konvergiert

BW: Die Reihe ist alternierend. Falls die Folge $\{|a_n|\}$ eine monotone Nullfolge bilden, kann man das Leibnizkriterium anwenden, um auf die Konvergenz zu schließen.

Für $n \geq 2$ kann die Monotonie wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned} & |a_{n-1}| > |a_n| \\ \Leftrightarrow & \frac{n}{n\sqrt{n}-1} > \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} && \text{Einsetzen} \\ \Leftrightarrow & n((n+1)\sqrt{n+1}-1) > (n+1)(n\sqrt{n}-1) && \text{Monotoniegesetze} \quad \text{der} \\ & && \text{Multiplikation} \quad - \quad \text{alle} \\ & && \text{Terme positiv} \\ \Leftrightarrow & n(n+1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+1 > 0 && \text{Umformung unter Benüt-} \\ & && \text{zung der Monotoniege-} \\ & && \text{setze} \end{aligned}$$

Die letzte der Ungleichungen ist für alle $n \geq 2$ richtig, da Summe positiver Terme, also ist die Folge $\{|a_n|\}$ streng monoton fallend.

Daß es sich um eine Nullfolge handelt, sieht man z.B. wie folgt ein (im Folgenden ist stets $n \geq 2$):

$$|a_{n-1}| = \frac{n}{n\sqrt{n}-1} < \frac{n}{n\sqrt{n}-n} = \frac{1}{\sqrt{n}-1} < \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{2}\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Somit ist $|a_{n-1}|$ durch die Nullfolge $\frac{2}{\sqrt{n}}$ für alle $n \geq 2$ abgeschätzt, und nach dem Einschließungskriterium selbst eine Nullfolge.

Beh 2: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert.

Um dies zu zeigen, verwenden wir die aus der hyperharmonische Reihe für $c = \frac{1}{2}$ gebildete Reihe $\sum_{b=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ als divergente Minorante:

$$|a_{n-1}| = \frac{n}{n\sqrt{n}-1} > \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(Vergrößert man den Nenner, so wird der Bruch kleiner – es entsteht eine Abschätzung nach unten!)

Beh 3: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|s - s_k| \leq \frac{a_{k+1}}{2}$.

BW: Es genügt hierzu wegen S.56 die Monotonie von

$$\{|a_n| - |a_{n+1}|\}$$

zu zeigen.

Es ist (für $n \geq 2$) die Monotonie zu

$$c_n := |a_n| + |a_{n+2}| - 2|a_{n+1}| \geq 0$$

äquivalent. Eine elementare Umformung ergibt mit den Bezeichnungen

$$x_n := \sqrt{n+2}\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}\sqrt{n} - 2\sqrt{n+2}\sqrt{n}$$

und

$$y_n := (n+2)^2\sqrt{n+2} + n^2\sqrt{n} - 2(n+1)^2\sqrt{n+1}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n}{n\sqrt{n}-1} + \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} - 2\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)x_n + y_n}{\sqrt{(n+2)(n+1)n}} \end{aligned}$$

Um $c_n \geq 0$ zu zeigen, reicht es $x_n \geq 0$ und $y_n \geq 0$ nachzuweisen. Es soll die arithmetisch-geometrische Ungleichung

$$(\forall a \geq 0) (\forall b \geq 0) \quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \tag{1}$$

benützt werden. Dann ergibt sich für $a := \sqrt{n+2}\sqrt{n+1}$ und $b := \sqrt{n+1}\sqrt{n}$ die Abschätzung

$$x_n \geq 2\sqrt{(n+1)\sqrt{n^2+2n}}. \quad (2)$$

Nun muß man sich noch von

$$\sqrt{(n+1)\sqrt{n^2+2n}} \geq \sqrt{n^2+2}$$

überzeugen, was durch Äquivalenzumformungen mittels der Monotoniegesetze folgt.

Es genügt nun, noch $y_{n-1} \geq 0$ für alle $n \geq 3$ nachzuweisen, d.h.

$$(n+1)^{\frac{5}{2}} + (n-1)^{\frac{5}{2}} \geq 2n^{\frac{5}{2}}$$

zu zeigen. Später wird dies leicht aus der Konvexität der Funktion $y = x^{\frac{5}{2}}$ folgen, hier ist jedoch ein elementarer Nachweis gefordert. Quadrieren (als Äquivalenzumformung) ergibt

$$(n+1)^5 + (n-1)^5 + 2(n^2-1)^{\frac{5}{2}} \geq 4n^4,$$

und weitere Äquivalenzumformungen

$$(2n^5 - 4n^4) + 20n^3 + 10n + 2(n^2-1)^{\frac{5}{2}} \geq 0,$$

eine wahre Aussage für alle $n \geq 2$, da $2n^5 \geq 4n^4$ für solche n stets gilt, und deshalb der Term auf der linken Seite Summe nichtnegativer Terme ist.

Beh 4: Für $k \geq 498$ ist $|s - s_k| < 10^{-3}$. Weiters ist $s - s_{499} > 0$.

BW: Wegen Beh.3 reicht es, ein (recht kleines) k mit

$$\frac{|a_{k+1}|}{2} \leq 10^{-3}$$

zu finden. Setzt man der Einfachheit halber $m := k+2$, so sucht man (in leicht umgeformter Form) $m \geq 3$ mit

$$500 + \frac{1}{m} \leq \sqrt{m}.$$

Somit ist $m \geq 500^2$. Für $m := 501^2$ ist

$$(500 + \frac{1}{501^2})^2 < (500 + 1)^2 = 501^2.$$

Somit ist $m = 501$, also kann man $k = 499$ wählen.

Wegen Beh.3 ist $\{|a_n|\}$ eine monotone Nullfolge. Deshalb ergibt das Vorzeichen von a_{k+1} , in unserem Falle jenes von a_{500} , das Vorzeichen des Fehlers an.