

1 Angabe

Es sei $\{a_n\}$ eine monotone Nullfolge positiver reeller Zahlen, derart daß $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n$ konvergiert. Man zeige, daß dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Ein Beispiel dafür, daß man auf die Monotonie nicht verzichten kann, ist anzugeben.

2 Lösung

Wegen der Monotonieeigenschaft ist für alle $n, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ stets $2^n a_j \geq \sum_{l=1}^{2^n} a_{j+l}$, insbesondere gilt für $j := 2^n$ die Abschätzung

$$2^n a_{2^n} \geq \sum_{l=1}^{2^n} a_{2^n+l}.$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{n=0}^N 2^n a_{2^n} \geq \sum_{p=0}^{2^{N+1}} a_p,$$

sodaß die Teilfolge $S_{2^{N+1}}$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sich als beschränkt erweist. Wegen der Monotonie der Partialsummen reicht dies aus, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach sich zu ziehen.

Als Beispiel eignet sich die durch $a_n := \frac{1}{n}$ für n keine Potenz von 2 bzw. $a_n := \frac{1}{n^2}$ andernfalls, definierte Reihe.