

## 1 Angabe

Man zeige, daß es eine Bijektion von  $A := (0, 1)$  auf  $B := (0, 1]$  gibt.

## 2 Ein Lösungsweg

Herumprobieren mit elementaren Funktionen geht leider nicht (da kommt man mit der Stetigkeit in Konflikt).

Eine Idee ist wie folgt: Sei  $A_0 := \mathbf{Q} \cap A$  und  $B_0 := \mathbf{Q} \cap B$ . Dann ist  $1 \in B_0$  und es gibt eine Bijektion  $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ . Das Schöne an dieser Wahl ist, daß  $A \setminus A_0 = B \setminus B_0$  genau die Menge der Irrationalzahlen im Intervall  $[0, 1]$  ist. Dann erweitern wir  $f_0$  zu einer Funktion auf ganz  $(0, 1)$ , indem jede Irrationalzahl auf sich selbst abgebildet wird, d.h.

$$f(x) := \begin{cases} f_0(x) & \text{falls } x \in \mathbf{Q} \cap (0, 1) \\ x & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Ein ausformalisierter Beweis, daß tatsächlich eine Bijektion vorliegt, soll hier nicht vorgeführt werden.

Die in der Übung verwendete ‘Hotelzimmermethode’ funktioniert auch für Mengenpaare  $A$  und  $B$ , die nur um eine höchstens abzählbare Teilmenge ‘differieren’, d.h., wo  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  höchstens abzählbar ist.