

1 Angabe

Gegeben sind Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ durch $a_n := \frac{1}{n^2}$ und $b_n := \frac{1}{n(n+1)}$. Man zeige, daß $s := \sum_{a=1}^{\infty} a_n$ und $t := \sum_{b=1}^{\infty} b_n$ existieren. Man ermittle $k \in \mathbb{N}$ derart, daß bei Ersetzen von s durch $t + \sum_{n=1}^k c_n$ der Fehler höchstens ein Zehntel von jenem ist, der entsteht, wenn s durch $\sum_{n=1}^k a_n$ ersetzt wird.

2 Lösung (nur der Teil mit der Fehlerabschätzung)

Der erste der beiden Fehler ist

$$\delta_k := s - (t + \sum_{n=1}^k c_n),$$

der zweite ist

$$\Delta_k := s - \sum_{n=1}^k a_n.$$

Gesucht ist eine Abschätzung nach oben für das minimale k , derart daß

$$|\delta_k| \leq \frac{1}{10} |\Delta_k| \quad (*)$$

gilt (wegen der Monotonie der Partialsummen gilt $(*)$ für alle größeren k). Im Beispiel sind alle a_n , b_n und c_n positiv, sodaß $\delta_n \geq 0$ and $\Delta_n \geq 0$ (bitte selbst prüfen!). Deshalb erweist sich $(*)$ als äquivalent zu

$$s - t - \sum_{n=1}^k c_k \leq \frac{1}{10} \left(s - \sum_{n=1}^k a_n \right).$$

Da $c_n = a_n - b_n$, ist Letzteres auch in der Form

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \leq \frac{1}{10} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \right)$$

anschreibbar, bzw., nach weiterer Umformung mittels der Monotoniegesetze,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \geq \frac{9}{10} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \right). \quad (**)$$

Nun besteht die weitere Strategie darin, die linke Seite nach unten und die rechte Seite nach oben abzuschätzen, derart daß eine stärkere, aber handhabbare Bedingung an k entsteht (d.h. es werden weniger k s die neue Bedingung erfüllen, wohl aber alle jene, die $(**)$ genügen). Aus der stärkeren Bedingung wird eine Abschätzung nach oben für das minimale k gewonnen werden.

2.1 Das minimale k erfüllt $k \leq 5$ (E.Böck)

Weil

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k+1}^{k+N} b_n &= \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \sum_{n=k+1}^{k+N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} - \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n+1} \\
 &= \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} - \sum_{n=k+2}^{k+N+1} \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+N+1},
 \end{aligned}$$

ergibt sich für die linke Seite in (**) der Ausdruck

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{k+1}. \quad (1)$$

Nun wird die rechte Seite in (**) nach oben abgeschätzt, derart, daß eine einfacher zu handhabende Bedingung an das k entsteht:

Dazu beobachtet man

$$a_n = b_n + c_n = b_n + \frac{1}{n^2(n+1)} < b_n + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = b_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right).$$

Hieraus ergibt sich ähnlich wie vorhin

$$\sum_{n=k+1}^{k+N} a_n < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{N+k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{N+k} + \frac{1}{N+k+1} + \frac{1}{N+k+2} \right)$$

Dies verwendend, findet man als Abschätzung für die rechte Seite in (**)

$$\frac{9}{10} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n < \frac{9}{10} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k(k+1)} \right).$$

Gleichung (1) verwendend, würde (**) für jedes k mit

$$\frac{1}{k+1} \geq \frac{9}{10} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k(k+1)} \right)$$

richtig sein, d.h. (nach einfache Umformungen) für alle $k \geq 5$. Deshalb hat man die Abschätzung $k \leq 5$ für das minimale k , welches (**) erfüllt.

2.2 Das minimale k erfüllt $k \leq 9$ (einfacherer Gedanken- gang - jedoch gröbere Schranke)

Es reicht, wenn in $(**)$ für alle $n \geq k$ stets jedes einzelne Folgenglied die Ungleichung

$$b_n \geq \frac{9}{10} a_n$$

erfüllt. Letzteres ist für $n \geq k$ zu

$$\frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{9}{10} \frac{1}{n^2},$$

bzw. zu

$$10n \geq 9(n+1),$$

m.a.W. zu $n \geq 9$ für alle $n \geq k$ äquivalent.