

1 Angabe

Durch Koeffizientenvergleich ermittle man die ersten 4 Koeffizienten der Potenzreihendarstellung von $f(x) := \ln(x+1)$ mit Anschlußstelle 0, wobei man von $x+1 = e^{\ln(x+1)}$ ausgehen kann.

2 Lösung

Sei $\ln(x+1) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ die gesuchte Potenzreihe, so ist wegen $f(0) = 0$ zunächst $a_0 = 0$. Wir benützen eine Reihenentwicklung von $e^{x(a_1+a_2x+a_3x^2+o(x^2))}$ mit der Anschlußstelle 0 (da ja $f(0) = 0$ ist) bis höchstens Glieder der Ordnung 3 (wobei jeder Reihenrest als Landausymbol für $x \rightarrow 0$ angeschrieben wird – um Schreibarbeit zu sparen) und hoffen natürlich, daß sich dadurch die fehlenden Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 bestimmen lassen:

$$\begin{aligned}
 x+1 &= e^{\ln(x+1)} = e^{x(a_1+a_2x+a_3x^2+o(x^2))} \\
 &= 1 + x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{2}x^2(a_1 + a_2x + a_3x^2 + o(x^2))^2 \\
 &\quad + \frac{1}{6}x^3(a_1 + a_2x + a_3x^2 + o(x^2))^3 + o(x^3) \\
 &= 1 + x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{2}x^2(a_1^2 + 2a_1a_2x + o(x^2)) + \frac{1}{6}x^3(a_1^3 + o(x)) \\
 &= 1 + a_1x + \left(a_2 + \frac{1}{2}a_1^2\right)x^2 + \left(a_3 + \frac{1}{2}2a_1a_2 + \frac{1}{6}a_1^3\right)x^3 + o(x^4).
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ als gesuchten Anfang einer Potenzreihenentwicklung.