

## 1 Angabe

Eine Folge  $\{a_n\}$  sei durch  $a_1 = a$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  rekursiv durch  $a_{n+1} := \sqrt{2a_n + 5}$  definiert. Man untersuche das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit vom Startwert  $a$ .

## 2 Lösung

**Beh 1:** Nur für  $a \geq -5$  ist die Folge definiert. Weiters ist  $a_n \geq 0$  für jeden solchen Startwert und  $n \geq 2$ .

BW: Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ sein. Wenn  $a \geq -5$  ist, so ist  $a_2 \geq 0$ . Danach ist  $a_n \geq 0$ , da Wurzelziehen stets ein nichtnegatives Resultat liefert.

**Beh 2:** Falls der Grenzwert  $\alpha$  existiert, so ist  $\alpha = 1 + \sqrt{6}$ .

BW: Aus der rekursiven Definition leitet man

$$a_{n+1}^2 = 2a_n + 5$$

her. Nun folgt durch Anwenden der Regeln für konvergente Folgen (man beachte, daß man auf diese Weise sich nicht mit der Wurzel auseinandersetzen muß!)

$$\alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0,$$

und da die negative Wurzel wegen Beh.1 ausscheidet, verbleibt  $\alpha = 1 + \sqrt{6}$ .

**Beh 3:** Für alle  $n \geq 3$  folgt aus  $a_n < a_{n-1}$  die Gültigkeit von  $a_{n+1} < a_n$ .

BW: Sei  $a_n \leq a_{n-1}$

$a_n < a_{n-1}$	Annahme
$\Rightarrow 2a_n + 5 < 2a_{n-1} + 5$	Monotoniegesetze
$\Rightarrow \sqrt{2a_n + 5} < \sqrt{2a_{n-1} + 5}$	Wegen Beh.1 sind die Radikanden nichtnegativ
$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$	Rekursion.

**Beh 4:** Für alle  $n \geq 3$  folgt aus  $a_n > a_{n-1}$  die Gültigkeit von  $a_{n+1} > a_n$ .

BW: analog zu Beh.2.

**Beh 5:** Für  $a \in [0, 1 + \sqrt{6})$  ist die Folge monoton steigend und hat die obere Schranke  $1 + \sqrt{6}$ .

BW: Die Monotonie soll mit Induktion gezeigt werden. Als Anfang behaupten wir  $a_1 \leq a_2$ . Es ist

$$\begin{aligned} & a_1 \leq a_2 \\ \Leftrightarrow & a \leq \sqrt{2a+5} && \text{Definition von } a_1, a_2 \\ \Leftrightarrow & a^2 \leq 2a+5 && a \text{ und der Radikand sind nichtnegativ} \\ \Leftrightarrow & a \in [0, 1+\sqrt{6}] && \text{elementare Diskussion des quadratischen Ausdrucks.} \end{aligned}$$

Nun verwendet man Beh.4. um aus der Induktionsannahme, daß für ein  $n \geq 2$  man  $a_{n-1} < a_n$  hat, den entsprechenden Schluß zu gewinnen.

**Beh 6:** Für  $a \in (1 + \sqrt{6}, \infty)$  ist die Folge monoton steigend und hat die obere Schranke 5.

Analog Vorigem.

Zusammenfassend kann als Ergebnis gesagt werden:

Bedingung an $a$	Die Folge
$< -5$	ist nicht definiert
$\in [-5, 1 + \sqrt{6})$	strebt streng monoton steigend gegen $1 + \sqrt{6}$
$= 1 + \sqrt{6}$	ist konstant gleich $1 + \sqrt{6}$
$\in (1 + \sqrt{6}, \infty)$	strebt streng monoton fallend gegen $1 + \sqrt{6}$