

## 1 Angabe

Geben Sie eine Formel für die Summanden an und untersuchen Sie die angegebene Reihe auf Konvergenz (betrachten Sie, falls nötig, zuerst eine Teilfolge der Teilsummenfolge):

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \dots$$

## 2 Lösung

Das ‘Formelfinden’ ist der Intuition überlassen. Es fällt auf, daß als Nenner der Reihe nach die Wurzeln aller ungeraden natürlichen Zahlen durchlaufen werden. Man braucht noch eine Funktion die für  $n = 4k + 1, n = 4k + 2$  den Wert 1 und für  $n = 4k + 3, n = 4k + 4$  den Wert  $-1$  als Wert ausgibt, um die Vorzeichen zu bekommen. Eine solche Funktion ist

$$n \mapsto \left[ \frac{n-1}{2} \right],$$

sodaß

$$a_n = \frac{(-1)^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]}}{\sqrt{2n-1}}$$

die gesuchte ‘Formel’ für die Reihenglieder ist. Der ‘Beweis’ erfolgt durch Überprüfen für  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (mehr ist schließlich nicht aus der Angabe ablesbar!)

Zunächst eine recht ‘kanonische’ Methode, um die Konvergenz der Reihe zu untersuchen:

Wir bestimmen zunächst einen einfachen Ausdruck für

$$S_{2N} := \sum_{n=1}^{2N} a_n = \sum_{k=1}^N (a_{2k-1} + a_{2k}).$$

Setzt man nun

$$b_k := |a_{2k-1} + a_{2k}| = \frac{1}{\sqrt{2k-1}} + \frac{1}{\sqrt{2k}},$$

so zeigt man, daß  $b_k$  eine streng monoton fallende Nullfolge ist (der ungerade und der gerade Term für sich haben diese Eigenschaft, also wegen der Monotonie der Addition auch  $\{b_k\}$ ). Deshalb ist das Leibnizkriterium auf die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N}$$

anwendbar, m.a.W.,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N}$$

existiert. Dann existiert auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( S_{2N} + \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N},$$

wobei man benützt hat, daß die Summe konvergenter Folgen gegen die Summe der Grenzwerte strebt. Hieraus folgt die Konvergenz von

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Von einigen Übungsteilnehmern wurde folgender Satz (S.53) benützt, der eine Verallgemeinerung des Leibnizkriteriums ist:

**Satz 1** *Ist die Teilsummenfolge von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  beschränkt und  $\{b_n\}$  eine monotone Nullfolge, so ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

*konvergent.*

Im vorliegenden Beispiel setzt man  $a_n := (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$  und  $b_n := \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ . Die Teilsummenfolge von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nimmt lediglich Werte in  $\{0, 1, 2\}$  an, ist somit beschränkt, und die Folge  $\{b_n\}$  ist eine monotone Nullfolge. Also sind die Prämissen des Satzes erfüllt und als Konsequenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

konvergent.