

1 Angabe

Für welche Startwerte a_1 ist durch $a_{n+1} := \sqrt{a_n + 3}$ eine unendliche Folge gegeben? Für solche a_1 untersuche man das Konvergenzverhalten.

2 Lösung

Beh 1: Ist $a_1 \geq -3$, so ist a_n für alle $n \geq 2$ definiert und nicht negativ. Ist $a_1 < -3$, so ist a_2 nicht definiert.

BW.: Ist $a_1 < -3$, so ist der Radikand negativ, also a_2 nicht definiert. Ist hingegen $a_1 \geq -3$, so ist a_2 definiert und ≥ 0 . Deshalb ist dann auch a_n für $n \geq 3$ definiert und positiv.

Beh 2: Falls $\{a_n\}$ gegen den GW $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so ist $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$,

BW.: Es sei a der GW. Aus der Rekursion ergibt sich

$$a_{n+1}^2 = a_n + 3,$$

sodaß aus den GW-Regeln (Limes des Produkts konvergenter Folgen = Produkt der Limiten, Limes der Summe konvergenter Folgen = Summe der Limiten) die Gleichung

$$a^2 = a + 3$$

hergeleitet wird, deren negative Wurzel wegen Beh.1 ausscheidet.

Beh 3: Für alle $n \geq 2$ und $a_1 \geq -3$ ist $|a_{n+1} - a| < \frac{|a_n - a|}{2}$.

BW.: Es ist

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a| &= |\sqrt{a_n + 3} - a| \\ &= \frac{|a_n + 3 - a^2|}{\sqrt{a_n + 3} + a} \\ &\leq \frac{|a_n + 3 - a^2|}{|a_n + 3 - a^2|} \\ &= \frac{|a_n - a|}{a} \\ &\leq \frac{|a_n - a|}{2} \end{aligned}$$

Beh 4: Die Folge a_n konvergiert für $a_1 \geq -3$ gegen $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

BW.: Man findet aus Beh.2 durch vollständige Induktion

$$0 \leq |a_{n+1} - a| \leq \frac{|a_1 - a|}{2^n},$$

sodaß das Einschließungskriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a| = 0$$

liefert. Deshalb existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$, sodaß für alle $n \geq N(\epsilon)$

$$|a_{n+1} - a| < \epsilon$$

gilt. Somit konvergiert wegen Seite 37 2.1 3. (Definition der Konvergenz von $\{a_n\}$) die Folge $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ gegen a , und somit gilt die Behauptung.