

Ad Beispiel 207

Leider wurde auf die Frage, warum die *durch Streichen der Klammern* entstehende Reihe konvergiert, nicht eingegangen. Das soll hier geschehen:

Durch *das Streichen der Klammern* entsteht die Reihe

$$a_1^{(1)} + \dots + a_1^{(k)} + a_1^{(2)} + \dots + \dots,$$

eine Reihe, deren Glieder mit c_n bezeichnet, dem Bildungsgesetz

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & a_1^{(1)} \\ c_2 & = & a_1^{(2)} \\ & \vdots & \\ c_k & = & a_1^{(k)} \\ c_{k+1} & = & a_2^{(1)} \\ c_{k+2} & = & a_2^{(2)} \\ & \vdots & \\ c_{2k} & = & a_2^{(k)} \\ & \vdots & \end{array}$$

genügt. Dieses Bildungsgesetz läßt sich in der Form

$$c_{(n-1)k+l} = a_l^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad l \in \{1, \dots, k-1\}$$

anschreiben. (In der Tat, schreibt man die Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$ in Zeilen zu je k Stück, so erkennt man die *geometrische* Deutung dieses Bildungsgesetzes sehr leicht).

Wie in den Übungen vorgeführt, findet man unter Verwendung von

$$b_j := \sum_{i=1}^k a_j^{(i)}$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j.$$

Hieraus, wenn $s_n := \sum_{l=1}^n c_l$ die n -te Partialsumme der Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} c_l$ bezeichnet, ergibt sich

$$b_j = s_{kj}.$$

Deshalb folgt aus der Konvergenz der Reihe $s := \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ die Konvergenz der Partialsummen der Form

$$s_{kj}, j = 1, 2, \dots$$

gegen s . Nun überlegt man sich, daß die Folge $\{c_l\}_{l=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist (bitte überlegen Sie es sich in Ruhe!). Deshalb ist für jedes $l \in \{1, \dots, k-1\}$ die Partialsummenfolge

$$\{s_{kj+l}\}_{j=1}^{\infty}$$

konvergent mit Grenzwert s . Schließlich vermerkt man, daß die Folge der Partialsummen als *Mischfolge* aus den k Folgen $\{s_{kj+l}\}_{j=1}^{\infty}$ mit $k \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ entsteht, und somit ebenfalls gegen s konvergiert.