

1 Angabe

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n(x) := \frac{(x+2)^{3n}}{n^3 \sqrt{n}}$ und $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ eine hieraus gebildete Funktionenreihe. Man bestimme den Konvergenzbereich der Reihe. Auf welchen Intervallen ist die Gleichmäßigkeit der Konvergenz gesichert? Wo ist die Grenzfunktion stetig?

2 Lösung

Beh 1: Die Reihe konvergiert für alle x mit $|x+2| \leq 1$ absolut.

BW.: Es bietet sich das Raabe-Kriterium (Seite 57) in der folgenden Form an (wobei man sich klar machen muß, daß für eine konvergente Folge Limes superior und Limes inferior mit dem Limes übereinstimmen):

Ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n(x)|}{|a_{n+1}(x)|} - 1 \right) = A \in (1, \infty],$$

so konvergiert $S(x)$ für dieses x absolut.

Es ist für $x \neq -2$ der Ausdruck im Raabe-Kriterium

$$n \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{2}}}{|x+2|^3} - 1 \right),$$

und für $0 < |x+2| < 1$ strebt er gegen $A = +\infty$. Für $x = -1$ strebt er gegen $\frac{7}{2} > 1$. Ist $x = -2$, so bestehen die Reihenglieder aus der Nullfunktion, sodaß $S(0) = 0$ konvergent ist.

Beh 2: Für $|x+2| > 1$ divergiert die Reihe.

BW.: Leider macht das RK nur eine Aussage über die nicht absolute Konvergenz. Daraus kann man nicht auf Divergenz schließen. Es eignet sich das Wurzelkriterium in folgender Form:

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n(x)|^{\frac{1}{n}} > 1$, so divergiert die Reihe für dieses x .

In unserem Fall ist der Ausdruck im Wurzelkriterium

$$\frac{|x+2|^3}{n^{\frac{7}{2n}}}$$

und er strebt bei n gegen Unendlich nach $|x+2|^3$. Deshalb divergiert die Reihe für $|x+2| > 1$.

Beh 3: $S(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $[-3, -1]$. Jedes Intervall, auf dem die Reihe gleichmäßig konvergiert, ist in $[-3, -1]$ enthalten.

BW.: Es ist auf $[-3, -1] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| \leq 1\}$ die Abschätzung

$$|a_n(x)| \leq |a_n(-1)|$$

gültig, sodaß für alle $x \in [-3, -1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| S(x) - \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(-1) \\ &= S(-1) - \sum_{n=1}^N a_n(-1) \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$0 \leq \sup_{x \in [-3, -1]} \left| S(x) - \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| < S(-1) - \sum_{n=1}^N a_n(-1),$$

sodaß nach dem Einschließungskriterium für Folgen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-3, -1]} \left| S(x) - \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| = 0,$$

m.a.W., die gleichmäßige Konvergenz auf $[-3, -1]$ folgt.

Ist I ein Intervall, auf dem gleichmäßige Konvergenz vorliegt, so muß dort Konvergenz vorliegen, also wegen Beh.1 und 2 $I \subseteq [-3, -1]$ gelten.

Beh 4: $S(x)$ ist auf $[-3, -1]$ gleichmäßig stetig.

BW.: Die Folge $\{S_N\}$ mit

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^N a_n(x)$$

konvergiert wegen Beh.3 gleichmäßig auf $[-3, -1]$ gegen $S(x)$. Deshalb ist S auf $[-3, -1]$ gleichmäßig stetig.