

1 Angabe

Für die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bestimme man den Konvergenzbereich, nennen wir ihn K (d.h. K ist die Menge aller x , für welche die Reihe konvergiert):

$$f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}.$$

2 Lösung

Es ist $K = (-1, 1)$, wie sich aus den nachstehenden Behauptungen ergibt.

Beh 1: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der Definitionsbereich $D(f_n) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Insbesondere ist $-1 \notin K$.

BW.: Die Nenner dürfen nicht verschwinden. Das tun sie lediglich für $x = -1$.

Beh 2: Es ist $0 \in K$.

BW.: Es ist $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit jede Partialsumme Null, also konvergiert die Reihe gegen Null. Deshalb ist $0 \in K$.

Wir werden im Folgenden das Raabekriterium verwenden, um für $0 < |x| < 1$ absolute Konvergenz nachzuweisen und bestimmen den relevanten Ausdruck:

Beh 3: Für $x \neq 0$ ist $q_n(x) := n \left(\frac{|f_n(x)|}{|f_{n+1}(x)|} - 1 \right) = n \left(\frac{1+x^{2n+3}}{1+x^{2n+1}} \frac{1}{x^2} - 1 \right)$.

BW.: Elementare Rechnung und Beachten, daß $|x| < 1$ ist, sodaß man Betragsstriche weglassen kann.

Beh 4: $(-1, 1) \setminus \{0\} \subseteq K$.

BW.: Da für $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ wegen der in der vorigen Behauptung gewonnenen Gestalt des im Raabekriteriums wesentlichen Ausdrucks $q_n(x) \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt, findet man absolute Konvergenz für solche x .

Beh 5: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} \cap K = \emptyset$. Es ist $1 \notin K$.

BW.: Für $|x| > 1$ ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left|x + \frac{1}{x^{2n}}\right|} = \frac{1}{|x|},$$

wie aus den Grenzwertregeln folgt. Deshalb bilden für solche x die Glieder der Funktionenreihe keine Nullfolge, sodaß $x \notin K$ gilt.

Für $x = 1$ ist $f_n(1) = \frac{1}{2}$ und somit die Reihe divergent gegen $+\infty$.