

1 Angabe

Man zeige, daß es eine Bijektion $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ gibt.

2 Lösung

Zunächst etwas Intuition: Man beobachtet, daß der Funktionsgraph von $y = \frac{1}{x}$ das Intervall $(0, \infty)$ bijektiv auf $(0, \infty)$ abbildet. Verschiebt man den Graphen um eine Einheit nach unten, so bildet er $(0, 1]$ auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ab. Somit behaupten wir, daß (nach leichter, vorbereitender Rechnung), $f(x) := \frac{1}{x} - 1$ eine Bijektion von $(0, 1]$ nach $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ist. Zum Beweis der Injektivität: $f(x) = f(x')$ lt. Def. g.d.w. $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x'} - 1$ gilt. Äquivalenzumformungen der Ungleichung mittels der Monotoniegesetze ergibt $x = x'$.

Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Dann ergibt leichte Rechnung, daß aus $y = f(x)$ sichtlich $x := \frac{1}{y+1}$ folgt. Nun muß man sich allerdings noch davon überzeugen, ob $x \in (0, 1]$ liegt, sonst ist ja f für dieses x nicht definiert (Werte der Funktion an Stellen außerhalb von $(0, 1]$ sind irrelevant!). Sichtlich ist $x > 0$ und $x \leq 1$, somit $x \in (0, 1]$.