

1 Angabe

Man bestimme, sofern existent, $\inf T$ und $\sup T$ in \mathbf{Q} für die Menge $T := \{\frac{k^2-n}{k+1} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ bezüglich der lexikographischen Ordnung auf \mathbf{Q} (dessen Elemente in der Form $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbf{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ und z und n teilerfremd dargestellt werden) $\frac{z}{n} < \frac{z'}{n'}$ g.d.w. $n < n'$ oder $(n = n' \text{ und } z < z')$ gilt.

Beh.1: T ist nicht nach oben beschränkt in \mathbf{Q} .

BW: Es sei $T' := \{\frac{k^2-2}{k+1} \mid k \geq 3\}$. Man sieht leicht ein, daß Zähler und Nenner relativ prim sind. Deshalb sind die Brüche in T' in einer Form, in der sie bezüglich der lexikographischen Ordnung verglichen werden können. Die Menge der Nenner in T' ist nach oben nicht beschränkt, und deshalb ist T' nicht nach oben beschränkt bezüglich der lexikographischen Ordnung.

Da jede obere Schranke von T eine solche der Teilmenge T' wäre, kann T nicht nach oben beschränkt sein. Somit folgt Beh.1:

Beh.2: T ist nach unten nicht beschränkt.

BW: Es sei $T' := \{\frac{k^2-1-l(k+1)}{k+1} \mid k \in \mathbb{N}, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Es ist $\frac{k^2-1-l(k+1)}{k+1} = k+1-l = \frac{k+1-l}{1}$, und da l beliebig groß werden kann, ist somit T' nicht nach unten beschränkt. Weil $T' \subset T$, kann auch T nicht nach unten beschränkt sein.