

## 1 Angabe

Es sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bedingt konvergent. Weiters seien  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  mit  $a \leq b$ . Es ist zu zeigen, daß die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  so umgeordnet werden kann, daß die Partialsummenfolge der umgeordneten Reihe  $a$  als kleinsten und  $b$  als größten Verdichtungspunkt besitzt. Es ist zu zeigen, daß jeder Punkt  $x \in [a, b]$  als Verdichtungspunkt auftritt.

## 2 Lösung

**Intuition:** Zunächst darf man die Reihe so umordnen, daß die Folgenglieder eine alternierende Nullfolge bilden und die Folgen der jeweils positiven (negativen) Glieder monoton fallend sind. (Jede Umordnung der Ausgangsreihe ist eine von dieser Reihe). Im Bspl. ist diese Ausgangssituation für die Leibnizreihe schon gegeben. Ist  $a = -\infty$  so definieren wir  $\alpha_n := -n$  ansonst  $\alpha_n := a$ . Ist  $b = +\infty$  so definieren wir  $\beta_n := n$  ansonst  $\beta_n := b$ . Nun erscheint es nützlich, etwas Notation einzuführen: Es sei

$$S_p^- := \sum_{j=1}^p a_{2j-1}$$

und

$$S_p^+ := \sum_{j=1}^p a_{2j}.$$

Weiters sei  $S_m := \sum_{j=1}^m a_j$ . Die Idee besteht darin, für  $j = 1, \dots, k_1$  negative Glieder  $a_{2j-1}$  so lange zu addieren bis man

$$S_{k_1} := S_{k_1}^- < \alpha_1 \leq S_{k_1-1}^-$$

erreicht hat. Das geht, weil  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{2j-1} = -\infty$  wegen der bedingten Konvergenz gilt. Danach addiert man positive Glieder, genauer, man ermittelt ein  $l_1$  mit

$$S_{k_1}^- + S_{l_1-1}^+ \leq \beta_1 < S_{k_1+l_1} := S_{k_1}^- + S_{l_1}^+.$$

Das geht, weil  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} = +\infty$  wegen der bedingten Konvergenz der Ausgangsreihe.

Diese Überlegung führt auf

**Beh 1:** Es sei  $S_0^- := 0$  und  $S_0^+ := 0$ . Dann lassen sich für  $p \in \mathbb{N}$  streng monotone Folgen  $\{k_p\}$  und  $\{l_p\}$  natürlicher Zahlen derart definieren, daß

$$A_p := S_{k_p}^- + S_{l_{p-1}}^+ < \alpha_p \leq S_{k_p-1}^- + S_{l_{p-1}}^+,$$

$$S_{k_p}^- + S_{l_p-1}^+ \leq \beta_p < B_p := S_{k_p}^- + S_{l_p}^+$$

gelten.

Es sei  $S_{k_p+l_{p-1}} := A_p$  und  $S_{k_p+l_p} := B_p$ . Ist  $k_p + l_{p-1} \leq m \leq k_p + l_p$ , so gilt

$$A_p \leq S_m \leq B_p.$$

BW.: Vollständige Induktion unter Benützung der in den Vorüberlegungen dargelegten Argumente ergibt den ersten Teil.

Die zweite Behauptung gilt konstruktionsgemäß.

**Beh 2:** *a ist kleinster Verdichtungspunkt der Partialsummenfolge. b ist größter Verdichtungspunkt der Partialsummenfolge.*

BW.: Es ist  $S_{k_p-1}^- + S_{l_{p-1}}^+ + a_{2k_p-1} < \alpha_p \leq S_{k_p-1}^- + S_{l_{p-1}}^+$ , woraus die Konvergenz der Teilfolge

$$\left\{ S_{k_p-1}^- + S_{l_{p-1}}^+ + a_{2k_p-1} \right\}$$

gegen  $a$  wegen  $\{a_{2k_p-1}\} \rightarrow 0$  folgt. Nun sei  $x$  ein VP der Partialsummenfolge. Dann gibt es eine gegen  $x$  konvergente Teilfolge, deren Folge der Indizes  $\{m_t\}$  Ungleichungen

$$k_{p_t} + l_{p_t-1} \leq m_t \leq k_{p_t} + l_{p_t}$$

erfüllen müssen, sodaß

$$S_{m_t} \geq A_{p_t}$$

gilt. Ist  $-\infty < a$ , so folgt  $x \geq A_{p_t}$  für alle  $t \in \mathbb{N}$ , also  $x \geq a$ , wie behauptet.

Die zweite Behauptung beweist man analog.

**Beh 3:** *Jedes  $x$  mit  $a \leq x \leq b$  ist VP der Partialsummenfolge.*

BW.: Wegen der vorigen Behauptung darf  $x \in (a, b)$  angenommen werden. Es ist laut Konstruktion  $S_{k_p-1+l_{p-1}} < x < S_{k_p+l_p}$ . Somit ist

$$m_p := \max\left\{m > k_p - 1 + l_{p-1} \mid S_{k_p-1+l_{p-1}} + \sum_{j=l_{p-1}+1}^m a_{2j} < x\right\}$$

wohldefiniert und die Folge

$$\{S_{k_p-1+l_{p-1}+m_p}\}$$

konvergiert gegen  $x$  bei  $p$  gegen Unendlich.