

1 Angabe

Geben Sie eine Formel für die Summanden an und untersuchen Sie die angegebene Reihe auf Konvergenz (betrachten Sie, falls nötig, zuerst eine Teilfolge der Teilsummenfolge):

$$1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^4} - \frac{1}{4a^6} + \frac{1}{5a^8} - \dots$$

2 Lösung

Das ‘Formelfinden’ ist der Intuition überlassen. Es fällt auf, daß als Nenner der Reihe nach alle ungeraden natürlichen Zahlen durchlaufen werden. Somit findet man $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{na^{2(n-1)}}.$$

Der ‘Beweis’ erfolgt durch Überprüfen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (mehr ist schließlich nicht aus der Angabe ablesbar!)

Sichtlich kann die Reihe für $|a| < 1$ nicht konvergieren, denn für solche a gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na^{2(n-1)}} = +\infty,$$

im Widerspruch dazu, daß bei einer konvergenten Reihe dieser Grenzwert 0 sein müßte. Für $|a| \geq 1$ ist $\{|a_n|\}$ eine monotone Nullfolge (bei Bedarf durch Äquivalenzumformungen zu beweisen, indem man die Folgen $\{\frac{1}{n}\}$ und $\{\frac{1}{a^{2(n-1)}}\}$ getrennt auf Monotonie untersucht und danach die Monotoniegesetze der Multiplikation anwendet!), die Reihe ist alternierend, und deshalb läßt sich das Leibnizkriterium anwenden. Somit ist für solche a die Reihe konvergent.