

1 Angabe

Für

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} - 2\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$$

bestimme man $D(f)$ sowie eine stetige Fortsetzung (SF) auf eine möglichst große Teilmenge von \mathbb{R} .

2 Lösung

Sichtlich hat man

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}\right) &= (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \\ D\left(2\frac{1}{|x|}\right) &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}\right) &= (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \end{aligned}$$

sodaß

$$D(f) = D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}\right) \cap D\left(2\frac{1}{|x|}\right) \cap D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}\right) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

gilt.

Nun zur SF. Da $f(x) = f(-x)$ gilt, soll $f(1^+)$ untersucht werden. Existiert dieser GW, so kann man f (unter Einbeziehung der Symmetrie) zu einer auf $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ stetigen Funktion fortsetzen. Es ist jedoch unschwer zu sehen, daß

$$f(1^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{1} + \infty = +\infty$$

gilt, sodaß eine SF in die Menge $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ nicht gelingt.

Definiert man nun

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D(f) \\ 0 & \text{falls } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

so ist \tilde{f} sichtlich auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ stetig, und stimmt (auf Grund der Definition) mit f auf deren Definitionsbereich überein.

\tilde{f} ist also eine Lösung der Aufgabe. Sollte noch vermerkt werden, daß es nicht die einzige Lösung ist, weil jede auf $(-1, 1)$ stetige Funktion den Job auch geleistet hätte.