

## 1 Angabe

$f(x)$  sei für irrationales  $x$  Null und für rationales  $x = \frac{z}{n}$  mit  $z \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}$  zueinander teilerfremd als  $f(x) := \frac{(-1)^n n}{n+1}$  festgelegt. Für  $x = 0$  kommt man überein,  $z := 0$  und  $n := 1$  zu wählen, d.h.  $f(0) := -\frac{1}{2}$ . Man untersuche  $f$  auf (einseitige) Stetigkeit, bestimme die Art allfälliger Unstetigkeitsstellen und an den Sprungstellen die Sprunghöhe.

## 2 Lösung

Es soll vermerkt werden, daß  $z$  und  $n$  in der Darstellung einer rationalen Zahl  $x \neq 0$  als  $x = \frac{z}{n}$  durch die angegebenen Bedingungen eindeutig festgelegt sind.

**Beh 1:** Ist  $x$  rational, so gibt es eine Folge  $\{a_n\}$  irrationaler Zahlen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Man kann erreichen, daß  $a_n > x$  (bzw.  $a_n < x$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

BW.: Es sei  $a_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ . Da  $\sqrt{2}$  irrational ist, sind auch alle Glieder der Folge  $\{a_n\}$  irrational. Weiters ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$  und es ist  $a_n > x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . (Die eingeklammerte Situation behandelt man analog.)

**Beh 2:** Ist  $x$  rational, so gibt es eine Folge  $\{a_n\}$  rationaler Zahlen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Man kann erreichen, daß  $a_n > x$  (bzw.  $a_n < x$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt und daß die Nenner der  $a_n$  bei  $n \rightarrow \infty$  streng monoton wachsen.

BW.: Ist  $z = \frac{z}{n}$ , so wähle man eine Folge  $\{p_n\}$  von Primzahlen, von denen keine  $z$  oder  $n$  teilt, und die streng monoton wächst. Danach setzt man  $a_n := x + \frac{1}{p_n}$ . Sichtlich konvergiert diese Folge gegen  $x$ . Es ist auch  $a_n > x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gewährleistet. Schließlich ist

$$a_n = \frac{z}{n} + \frac{1}{p_n} = \frac{zp_n + n}{np_n}$$

und es wird behauptet, daß  $zp_n + n \in \mathbb{Z}$  und  $np_n \in \mathbb{N}$  zueinander relativ primär Zähler und Nenner von  $a_n$  sind. Beweis indirekt: Sei  $p$  ein gemeinsamer Primteiler. Dann muß er  $n$  teilen oder es ist  $p = p_n$ . Im ersten Fall muß er dann auch  $zp_n$ , also  $z$  teilen, was nicht geht. Somit muß  $p = p_n$  sein und  $p_n$  somit ein Teiler von  $n$  sein, im Widerspruch zur Annahme.

Insbesondere strebt die Folge der Nenner  $\{np_n\}$  streng monoton gegen  $+\infty$ .

**Beh 3:** Ist  $x > 0$  irrational, so gibt es eine Folge  $\{a_n\}$  rationaler Zahlen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Man kann erreichen, daß  $a_n < x$  (bzw.  $a_n > x$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Man kann erreichen daß die Nenner der  $a_n$  streng monoton gegen  $+\infty$  streben.

BW.: Es sei  $\{x_n\} = \frac{Z_n}{N_n}$  eine Folge von Dezimalbruchentwicklungen, die monoton steigend gegen  $x$  strebt. Insbesondere ist  $x_n \geq 0$  und somit  $Z_n \geq 0$ . Es soll gezeigt werden, daß die Folge der Nenner der  $x_n$  nicht beschränkt sein kann. Beweis indirekt. Sei  $x_n = \frac{Z_n}{N_n}$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$N_n \leq N.$$

Da die Folge  $\{x_n\}$  gegen  $x$  konvergiert, gibt es ein  $N_0$  mit  $0 < x - \frac{Z_n}{N_n} < 1$  (Formulierung der Konvergenz für  $\epsilon := 1$ ), sodaß  $0 < xN_n - Z_n$  und hieraus  $0 \leq Z_n < xN_n \leq xN$  folgt. Somit kann die Menge der Werte welche die Folge  $\{x_n\}$  annimmt, nur endlich sein, da es ja nur endlich viele Möglichkeiten für  $Z_n$  und  $N_n$  gibt. Deshalb ist ihr Grenzwert rational, im Widerspruch zu  $x$  irrational.

Als Folge  $\{a_n\}$  wählt man eine Teilfolge der Folge  $\{x_n\}$ , deren Nenner monoton gegen  $+\infty$  streben.

**Beh 4:** Wenn  $x$  rational ist, so ist  $f$  an  $x$  unstetig. Die einseitigen Limiten existieren nicht. Es liegt keine Sprungstelle vor.

BW.: Wir wollen nur  $x > 0$  und die Nichtexistenz der rechtsseitigen Limiten behandeln. Es ist  $f(x) \neq 0$  (es wurde früher schon gezeigt, daß  $f$  symmetrisch ist).

Wegen Beh.1 kann man eine Folge  $\{a_n\}$  irrationaler Zahlen mit  $a_n > x$  und  $a_n \rightarrow x$  finden. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Nun wählt man gemäß Beh.2 eine Folge  $\{a_n\}$  rationaler Zahlen mit  $a_n > x$ , derart daß die Nenner monoton gegen  $+\infty$  streben, dann gibt es eine Teilfolge mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) \in \{-1, +1\}.$$

Somit ist  $f$  an  $x$  nicht rechtsseitig stetig, und es liegt auch keine Sprungstelle vor.

Die Aussage für linksseitige Unstetigkeit geht analog.

**Beh 5:** Wenn  $x$  irrational ist, so ist  $f$  an  $x$  unstetig. Die einseitigen Limiten existieren nicht. Es liegt keine Sprungstelle vor.

BW.: Wir wollen nur die Nichtexistenz der rechtsseitigen Limiten behandeln. Zunächst wählt man eine Folge irrationaler Zahlen  $\{x_n\}$ , mit  $x_n > x$ ,

die gegen  $x$  strebt. Dann strebt  $\{f(x_n)\}$  gegen 0. Wählt man die Folge wie unter Beh.3, so findet man ähnlich wie im Beweis von Beh.4 eine Teilfolge, deren GW in  $\{-1, 1\}$  liegt. Somit liegt keine Sprungstelle vor.