

1 Angabe

Mit Hilfe des $\epsilon - \delta$ -Kriteriums zeige man die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x) := 2^x$ auf $\mathbb{Q} \cap [a, b]$, wobei $a < b$ gelte.

2 Lösung

Beh 1: Für $x, y \in [a, b]$ gilt $|2^x - 2^y| \leq 2^b(2^{|x-y|} - 1)$

Bew: Durch elementares Umformen (o.B.d.A kann $x \geq y$ angenommen werden).

Anmerkung: Es kommt jetzt darauf an, für $0 < h := |x - y| < 1$ eine gute Abschätzung für $2^h - 1$ zu bekommen, sodaß man das $\epsilon - \delta$ -Kriterium leicht anwenden kann. Das ist leider nicht ganz einfach, wenn man auf Mittelwertsätze und Definition der allgemeinen Potenzfunktion verzichtet.

Beh 2: Wenn $0 < h < 1$ und (in unserem Fall) $h \in \mathbb{Q}$ gilt, so hat man die Abschätzung $0 < 2^h - 1 < \frac{h}{1-h}$. Insbesondere, für $0 < h \leq \frac{1}{2}$ hat man $0 < 2^h - 1 < 2h$.

Bew: Zunächst sei $q := [\frac{1}{h}]$. Dann ergibt sich die Kette von Abschätzungen

$$2^{1/q} - 1 = \frac{1}{2^{(q-1)/q} + \dots + 2^{1/q} + 1} < \frac{1}{q},$$

und aus der Definition von $q = [1/h]$ ergibt sich unschwer $\frac{1}{q} \leq \frac{h}{1-h}$. Der Nachsatz ist unmittelbar klar.

Beh 3: Setzt man $\delta(\epsilon) := \min\{2^{-1-b}\epsilon, \frac{1}{2}\}$, so ist das das $\epsilon - \delta$ -Kriterium für die gleichmäßige Stetigkeit von 2^x auf $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ erfüllt.

Bew: Aus Beh 1 und 2. durch elementare Betrachtungen.