

1 Angabe

Es werde α^β als Mächtigkeit eines kartesischen Produktes $\prod_{i \in I} A_i$ mit $|A_i| = \alpha$ für alle $i \in I$ und $|I| = \beta$ definiert. Zeigen Sie, daß diese Definition von den gewählten Mengen unabhängig ist und erstellen Sie die Operationstafel der Potenzbildung für die Mächtigkeiten $0, n \in \mathbf{N}, \omega$ und Ω (überabzählbar).

2 Lösung

Zu zeigen ist folgendes: Sei für jedes $i \in I$ eine Menge A'_i und eine Bijektion $h_i : A_i \rightarrow A'_i$ gegeben, so sollte es eine Bijektion $h : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} A'_i$ geben. Man braucht die Definition des kartesischen Produkts (Seite 15), wobei folgende Vereinfachung getroffen wird (die Totalordnung spielt nämlich keine besondere Rolle, allerdings das Auswahlaxiom – soll hier nicht behandelt werden):

Definition 1 *Hat I bloß 2 Elemente, so wird $\prod_{i \in \{i_1, i_2\}} A_i := \{\{x, \{x, y\}\} \mid \exists a_{i_1} \in A_{i_1}, \exists a_{i_2} \in A_{i_2} : x = a_{i_1} \wedge y = a_{i_2}\}$ gesetzt. Es sei I eine beliebige Menge und $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Mengen (festgelegt durch eine Abbildung $\phi : I \rightarrow P(X)$, wobei X eine geeignete Grundmenge und jedes $A_i = \phi(i)$ ist). Dann ist $\prod_{i \in I} A_i$ die Menge aller Funktionen $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ für welche $f(i) \in A_i$ gilt.*

(Man stellt fest, daß für 2-elementige Mengen I es eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen $f : I \rightarrow A_{i_1} \times A_{i_2}$ mit $f(i_1) \in A_{i_1}$ und $f(i_2) \in A_{i_2}$ und jenen des weiter oben definierten $\prod_{i \in \{i_1, i_2\}} A_i$ gibt. Deshalb ist eine einheitliche Sicht- und Schreibweise erlaubt. Die Definition für 2-elementiges I braucht man aber vorweg, um überhaupt den Funktionsbegriff formulieren zu können – mit dessen Hilfe man dann das kartesische Produkt ganz allgemein definiert.)

Nun zum Beispiel: Man muß jeder Funktion $f \in \prod_{i \in I} A_i$ eine entsprechende Funktion $h(f) \in \prod_{i \in I} A'_i$ in 'bijektiver Weise' zuordnen. Dazu sollte man die vorliegenden Daten verwenden können. Wir versuchen es mit

$$h(f)(i) := h_i(f(i)), \quad \forall i \in I.$$

Beh.1: $h(f) \in \prod_{i \in I} A'_i$.

BW: Dazu muß ich nur zeigen, daß $\forall i \in I$ man $h(f)(i) \in A'_i$ hat. Dies ist klar, weil $h(f)(i) = h_i(f(i))$ ist und $h_i : A_i \rightarrow A'_i$ abbildet.

Beh.2: h ist injektiv

BW: Angenommen $h(f) = h(g)$. Wir müssen zeigen, daß $f = g$ gilt.

| | | |
|---------------|---|---------------------------|
| $h(f) = h(g)$ | | Annahme |
| \Rightarrow | $\forall i \in I : h(f)(i) = h(g)(i)$ | Gleichheit von Funktionen |
| \Rightarrow | $\forall i \in I : h_i(f(i)) = h_i(g(i))$ | Definition von h |
| \Rightarrow | $\forall i \in I : f(i) = g(i)$ | jedes h_i ist Bijektion |
| \Rightarrow | $f = g$ | Gleichheit von Funktionen |

Beh.3: h is surjektiv.

BW: Sei $f' \in \prod_{i \in I} A'_i$. So ist ein $f \in \prod_{i \in I} A_i$ anzugeben, derart, daß $h(f) = f'$ gilt. Mit anderen Worten, daß für alle $i \in I$ die Beziehung $f'(i) = h_i(f(i))$ gilt. Da h_i eine Bijektion ist, gibt es die Umkehrabbildung $h_i^{-1} : A'_i \rightarrow A_i$. Jetzt erkennt man, daß unsere Forderung gleichwertig zu

$$f(i) = h_i^{-1}(f'(i))$$

ist. Nun macht man aus der Not eine Tugend, wir nehmen die voranstehende Forderung als Definition von f . Sichtlich ist dann für alle $i \in I$ stets $h(f)(i) = h_i(f(i)) = h_i(h_i^{-1}(f'(i))) = f'(i)$, also $h(f) = f'$, wie gewünscht.

Von der Operationentafel sei hier $0^\beta = 0$ gezeigt, falls $\beta \neq 0$ ist. Dazu muß man die Menge aller Funktionen von I in $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ betrachten, sodaß für alle $i \in I$ die Beziehung $f(i) \in A_i$ gilt. Nun ist I nicht leer, also kann es keine Funktion von I in die leere Menge geben (zu jedem $i \in I$ müßte es nämlich ein Element y in \emptyset geben, sodaß $y = f(i)$ gilt – ein Widerspruch).

Es sei noch $\alpha^0 = 1$ gezeigt. Dazu hat man alle Funktionen von der leeren Menge in $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i$ zu betrachten und zu zeigen, daß es genau eine gibt.

Dazu genügt es, sich zu überlegen, daß die Menge aller Funktionen von der leeren Menge in eine beliebige Menge X aus genau einem Element besteht.

Zunächst ist nach obiger Definition das kartesische Produkt $\emptyset \times X$ selbst leer (genau durchdenken! Die Existenzoperatoren braucht man). Danach kann es nur die leere Menge als Funktionsgraphen geben. Daß die leere Menge tatsächlich ein Funktionsgraph ist, läßt sich unmittelbar aus dem Funktionsbegriff nachweisen. Somit hat die Menge aller Funktionen von \emptyset nach X genau ein Element, wie behauptet.

Beachtlich ist die Feststellung

$$0^0 = 1.$$

Das wird im Laufe der Analysisvorlesung in anderem Kontext anders sein.

Die anderen Teile der Tabelle sind etwas einfacher.