

1 Angabe

Aus $x_1 = x$ mit $0 < x \leq 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^i$$

folgt $0 < x_n \leq x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

2 Lösung

Benütztes Faktum: Es ist für alle $0 < x \leq 1$ und $j \in \mathbb{N}$ auch $0 < x^j \leq 1$.
Dies folgt durch vollständige Induktion, soll hier aber nicht vorgeführt werden.

Induktionsanfang: $n = 1$ Es ist $x_1 = x$ und

$$\frac{1}{1} \sum_{i=1}^1 x_i^i = 1$$

wegen der rekursiven Definition des Summenzeichens (siehe Vorlesung).

Sich bitte klarmachen, daß die 'Langschrift' grundsätzlich durch die rekursive Definition zu ersetzen ist.

Induktionsannahme: Es sei n derart, daß $0 < x_j \leq x$ für $1 \leq j \leq n$ gilt.

Induktionsschluß: Zunächst ist x_{n+1} Summe nichtnegativer Glieder, wovon mindestens eines, nämlich $\frac{x-1}{n}$ positiv ist, somit ist $x_{n+1} > 0$.

Weiters ist

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^i && \text{lt. Definition} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^i + x_n^n \right) && \text{rekursive Definition von } \Sigma \text{ und} \\ &&& \text{Beachten daß } n \geq 2 \\ &\leq \frac{1}{n} ((n-1)x_n + x_n^n) && \text{Definition von } x_n \text{ und } n \geq 2 \\ &\leq \frac{1}{n} ((n-1)x_n + x_n) && \text{wegen } x_n^{n-1} \leq 1 \text{ und somit } x_n^n \leq x_n. \\ &= \frac{1}{n} n x_n && \text{Elementare Umformung} \\ &= x_n && \text{Da } n \geq 1 \text{ ist} \\ &\leq x && \text{Induktionsannahme.} \end{aligned}$$