

1 Angabe

Man untersuche, ob es eine reelle Folge $\{a_n\}$ gibt, deren Menge V der Verdichtungspunkte mit \mathbb{R} übereinstimmt.

2 Lösung

Wir wollen zeigen, daß es tatsächlich eine Folge mit dieser Eigenschaft gibt:

Die Menge \mathbb{Q} ist abzählbar und daher gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Als Kandidaten definieren wir eine Folge $\{a_n\}$ durch $a_n := f(n)$. Es genügt, $\mathbb{R} \subseteq V$ zu zeigen, weil ja $V \subseteq \mathbb{R}$ gilt, und danach sich beide Mengen als gleich erweisen.

BW: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $\epsilon > 0$. Es ist zu zeigen, daß es in $I_\epsilon := (x - \epsilon, x + \epsilon)$ unendlich viele Folgenglieder gibt. Wenn wir zeigen können, daß $I_\epsilon \cap \mathbb{Q}$ unendlich ist, so müssen deren Elemente als Folgenglieder von $\{a_n\}$ auftreten, und somit ist $x \in V$. Ist $x \in \mathbb{Q}$, dann ist $\{x - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cap I_\epsilon$ unendlich. Ist hingegen x irrational, so betrachtet man eine beliebige Folge $\{b_n\}$ von endlichen Dezimalbrüchen, welche gegen x konvergiert. Man kann es so einrichten, daß alle Folgenglieder von $\{b_n\}$ paarweise verschieden sind. Dann ist die Menge $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap I_\epsilon$ unendlich.