

1 Angabe

Sei

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{4} \sqrt{a_n^2 - 1}.$$

Man untersuche die Konvergenz der Folge in Abhängigkeit vom Startwert a .

2 Lösung

Wir behaupten zunächst, daß als möglicher Grenzwert α lediglich $\alpha = \sqrt{17}$ und $\alpha = -\sqrt{17}$ in Frage kommen.

Sei nämlich der Startwert a derart gewählt, daß die Folge $\{a_n\}$ für $a_1 := a$ gegen einen Grenzwert α konvergiert. Quadrieren der Rekursion ergibt

$$16a_{n+1}^2 = a_n^2(a_n^2 - 1),$$

woraus man mittels Rechenregeln für konvergente Folgen als Kandidaten für eigentliche Grenzwerte die in \mathbb{R} liegenden Lösungen der Gleichung

$$16\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2 - 1)$$

bekommt. Da der Radikand stets nichtnegativ sein muß, scheidet $\alpha = 0$ aus (in der Rekursion bewirkt $a = 0$ Multiplikation mit der nicht definierten Wurzel. **ACHTUNG: die Rekursion definiert somit nicht die konstante Folge mit Wert 0!**), sodaß

$$|\alpha| = \sqrt{17}$$

zwei Kandidaten ergibt. Wir werden uns auf $\sqrt{17}$ beschränken, somit auf positive Startwerte (sie müssen mindestens 1 sein), dann folgt aus der Rekursion, daß kein Folgenglied negativ sein kann. Der andere Fall $\alpha = -\sqrt{17}$ kann durch Betrachten der Folge $b_n := -a_n$, $\beta := -\alpha$, etc. unmittelbar abgehandelt werden.

Falls es nun ein n gibt, mit $a_n^2 > 17$, dann ist

$$a_{n+1} = a_n \frac{a_n^2 - 1}{4} > a_n$$

und Induktion zeigt, daß für $a > \sqrt{17}$ die Folge streng monoton ist. Sie kann nicht beschränkt sein, andernfalls müßte sie gegen $\sqrt{17}$ konvergieren, ein Widerspruch. Somit divergiert sie für solche Startwerte gegen $+\infty$.

Falls es ein n gibt, mit $a_n < \sqrt{17}$, so zeigt, sofern a_{n+1} definiert ist, eine ähnliche Überlegung

$$a_{n+1} < a_n.$$

Wären nun alle Folgenglieder für $k \geq n$ definiert, so müßte die Folge ab dem n .ten Glied streng monoton fallend sein. Da für alle $k \geq n$ stets $a_k^2 - 1 \geq 0$ sein muß, ist die Folge nach unten beschränkt und besitzt als ab dem n .ten Glied streng monoton fallende Folge einen Grenzwert. Dieser müßte einer der

Kandidaten, also $\sqrt{17}$ sein, ein Widerspruch. Daher ist die Folge für solche Startwerte nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Zusammengefaßt läßt sich das Konvergenzverhalten der Folge $\{a_n\}$ (bzw. ihr *Wohldefiniertsein*) in Abhängigkeit vom Startwert a wie folgt beschreiben:

Für $|a| < \sqrt{17}$ ist die Folge nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, für $|a| = \sqrt{17}$ konstant, und für $|a| > \sqrt{17}$ divergent gegen $+\infty$, falls $a > 0$ bzw. $-\infty$, falls $a < 0$.