

1 Angabe

Für die durch

$$a_n := (-1)^{\frac{n^3+n}{2}} n^{1-(-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}}$$

gegebene Folge soll die Menge V aller Verdichtungspunkte gefunden werden und die Folge als Mischfolge von gegen die Verdichtungspunkte konvergenten Teilfolgen dargestellt werden.

2 Lösung

Die Mischung von Folgen ist in Beh.4 angedeutet. Es ergibt sich $V = \{-\infty, -1, 4, +\infty\}$.

Beh 1: Die Folge $b_n := (-1)^{\frac{n^3+n}{2}}$ ist periodisch mit Periode 4 und es sind $b_1 = b_2 = b_3 = -1$, $b_4 = 1$.

Die Folge $c_n := 1 - (-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ erfüllt $c_{n+6} = c_n$ und es ist $c_1 = c_2 = c_6 = 0$ und $c_3 = c_4 = c_5 = 2$. Es ist weiters $a_n = b_n n^{c_n}$.

BW.: Die Werte der b_n für $n = 1, 2, 3, 4$ ergeben sich durch Einsetzen. Weiters ist

$$b_{n+4} = (-1)^{\frac{n^3+3n^2\cdot 4+3n\cdot 4^2+4^3+n}{2}} = (-1)^{\frac{n^3+n}{2}+3n^2\cdot 2+3n\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4^2} = (-1)^{\frac{n^3+n}{2}} = b_n.$$

Der Nachweis für die Behauptung über die c_n verläuft ähnlich und der Nachweis für die letzte Teilbehauptung ergibt sich aus der Definition von b_n und c_n .

Beh 2: Es sei $n, k \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_{n+12k} = (1 + \frac{12k}{n})^{c_n} a_n$.

BW.: Da die a_n alle nicht Null sind, kann man den Quotienten $\frac{a_{n+12k}}{a_n}$ betrachten. Es ist

$$\frac{a_{n+12k}}{a_n} = \frac{b_{n+12k}(n+12k)^{c_{n+12k}}}{b_n n^{c_n}} = \frac{b_n(n+12k)^{c_n}}{b_n n^{c_n}} = \left(1 + \frac{12k}{n}\right)^{c_n}.$$

Beh 3: Die Werte der Folgen $\{c_n\}$ und $\{a_n\}$ sind für $n = 1, \dots, 12$ wie folgt

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_n	0	0	2	2	2	0	0	0	2	2	2	0
b_n	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
a_n	-1	-1	3^2	4^2	-5^2	-1	1	1	-9^2	-10^2	11^2	1

BW.: Einsetzen.

Beh 4: *Es ist*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n+12k} = \begin{cases} -1 & n \in \{1, 2, 6\} \\ 1 & n \in \{7, 8, 12\} \\ \infty & n \in \{3, 4, 11\} \\ -\infty & n \in \{5, 9, 10\} \end{cases}$$

Insbesondere ist $\{-\infty, -1, 4, +\infty\} \subseteq V$.

BW.: Dies ergibt sich aus der in Beh. 3 angegebenen Tabelle und aus Beh. 2.

Beh 5: *Es ist* $V = \{-\infty, -1, 1, +\infty\}$.

BW.: Indirekt. Angenommen, V ist keine Teilmenge von $\{-\infty, -1, 1, +\infty\}$. Dann gibt es $x \in V \setminus \{-\infty, -1, 1, +\infty\}$ und es ist $x \in V \cap \mathbb{R}$. Eine Teilfolge a_{n_k} konvergiert nach x . Da es mod 12 nur die Reste in $R := \{0, 1, \dots, 11\}$ gibt, findet man eine Zahl $z \in R$ und eine Teilfolge $a_{n_{k_l}}$ derart, daß alle n_{k_l} von der Bauart $n_{k_l} = z + 12m_l$ sind, wobei alle $m_l \in \mathbb{N}$ sind. Deshalb kann die Teilfolge $a_{n_{k_l}}$ bei $l \rightarrow \infty$ (und somit auch die Teilfolge a_{n_k}) nur gegen einen der Werte in $\{-1, 1\}$ konvergieren. Somit wäre $x \in \{-\infty, -1, 1, +\infty\}$, ein Widerspruch.