

1 Angabe

Man zeige: Streicht man aus der harmonischen Reihe alle Summanden $\frac{1}{n}$, bei denen die Dezimaldarstellung von n mit 1 beginnt, so divergieren sowohl die erhaltene Reihe als auch jene der gestrichenen Summanden.

2 Lösung

Beh 1: *Es gibt $f(l) := 10^{l-1}$ natürliche Zahlen mit l Stellen, welche mit 1 beginnen. Jede ist kleiner als 2×10^l .*

Es gibt $g(l) := 8 \cdot 10^{l-1}$ natürliche Zahlen mit l Stellen, welche nicht mit 1 beginnen. Jede ist größer als 9×10^l .

BW (nur des ersten Teiles): Für jede solche l -stellige Zahl wird die führende Stelle durch 1 festgelegt, danach kann man die Ziffern 0 bis 9 an den anderen Stellen beliebig festlegen und bekommt genau $f(l)$ Möglichkeiten. Die größte Zahl beginnt mit 1 und wird mit lauter 9en fortgesetzt. Sie ist demnach kleiner als 2×10^l .

Beh 2: *Die beiden Reihen divergieren.*

BW (nur für die Reihe der gestrichenen Summanden): Es sei $F(N) := \sum_{l=1}^N f(l)$. Nun betrachtet man in der Folge $\{n\}$ jene Teilfolge $\{n_k\}$, deren Folgenglieder genau aus den Zahlen n_k mit führender 1 in der Dezimalentwicklung bestehen. Dann ist für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ die $F(N)$.te Partialsumme nach unten wie folgt abschätzbar:

$$S_{F(N)} > \sum_{l=1}^N f(l) \frac{1}{2 \times 10^l} = \sum_{l=1}^N \frac{1}{20} = \frac{N}{20}.$$

Somit divergiert die Reihe.