

1 Angabe

Für die Folge $\{a_n\}$ definiert durch

$$a_n := \frac{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}{n + 3}$$

bestimme man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, sofern vorhanden.

2 Lösung

Man kann die Anwendung der (hier sehr leicht herleitbare) Summenformel mittels des Satzes von Stolz umgehen.

Satz 1 Seien $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ reelle Zahlenfolgen, wobei $c_n \uparrow +\infty$. Falls die Folge $\{\delta_n\}$, definiert durch

$$\delta_n := \frac{b_n - b_{n-1}}{c_n - c_{n-1}}$$

gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bei $n \rightarrow \infty$ strebt, so gilt

$$a_n \rightarrow a$$

bei $n \rightarrow \infty$.

Setzt man in unserem Fall $b_n := 1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ und $c_n := 2n + 3$, so hat man für alle $n \geq 2$ stets $b_n - b_{n-1} = 2n - 1$ und $c_n - c_{n-1} = 3 > 0$, was zugleich zeigt, daß $\{c_n\}$ strikt monoton gegen $+\infty$ strebt. Es ist

$$\delta_n = \frac{2n - 1}{3},$$

somit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$