

1 Angabe

Es sei eine Folge $\{a_n\}$ durch $a_{2k-1} := \left(\frac{2}{3}\right)^k$ und $a_{2k} := \frac{2^k}{3^{k+1}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Man untersuche die Reihe $\sum_{a=1}^{\infty} a_n$ mittels Raabe und Wurzelkriterium.

2 Lösung

Beh 1: Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = -\infty$ und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = +\infty$.
Das Raabe-Kriterium liefert keine Aussage.

BW: Durch Einsetzen findet man zunächst

$$n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = \begin{cases} -\frac{4k}{3} & \text{falls } n = 2k \\ 2(2k-1) & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich die erste Behauptung. Da weder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) > 1$$

noch

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) < 1$$

gilt, kann keine Aussage getroffen werden.

Beh 2: Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Die Reihe konvergiert absolut.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{3^{\frac{1}{2k}}} & \text{falls } n = 2k \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4k-1}} & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich die erste Behauptung und weil $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$ ist, liefert das Wurzelkriterium die Konvergenzaussage.

Beh 3: Das Quotientenkriterium liefert keine Aussage.

Durch Einsetzen findet man zunächst

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} 3 & \text{falls } n = 2k \\ \frac{1}{3} & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$$

Somit ergibt sich $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 3 \geq 1$, sodaß nicht auf die Konvergenz geschlossen werden kann. Weiters ist $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ nicht für fast alle Indizes n richtig, sodaß sich auch keine Divergenzaussage ableiten läßt.