

1 Angabe

Zeigen Sie $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$.

2 Lösung

Erweist sich die linke Seite als absolut konvergent, so dürfen Summanden beliebig vertauscht werden. Dies kann benutzt werden, indem man von der vertauschten Situation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k}$$

ausgeht, deren Konvergenz überprüft und somit (im nachhinein) die absolute Konvergenz der ursprünglichen Reihe nachweist. Die neue Reihe ist genau dann konvergent, wenn es die Reihe

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2n}}$$

ist. Elementares Umformen ergibt

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)},$$

eine Reihe, deren Glieder die Abschätzung

$$\frac{1}{2n(2n-1)} < \frac{1}{(2n-1)^2}$$

erlauben, wobei die Reihe zur Rechten (z.B. nach Raabe) sich als konvergent erweist (oder als Teilreihe von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$). Somit ist S konvergent.

Die N .te Partialsumme S_N von S ergibt nach Partialbruchzerlegung

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$$

die $2N$.te Partialsumme der rechten Seite der Angabe. Da die rechte rechte Seite der Angabe nach dem Leibnizkriterium konvergent ist, ergibt sich die Gleichheit mit S .