

1 Angabe

Man zeige die Stetigkeit von $f(x) := \frac{x^2-1}{x+3}$ an der Stelle $x_0 := 0$ mittels ϵ - δ Kriterium. Für $\epsilon := 10^{-3}$ gebe man ein $\delta(\epsilon)$ an, für welches das Kriterium erfüllt ist.

2 Lösung

Es ist $f(0) = -\frac{1}{3}$, sodaß man zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ garantieren muß, für das $|f(x) - f(0)| = \dots = \frac{|3x+1|}{3|x+3|}|x| < \epsilon$ gilt, falls $|x| < \delta(\epsilon)$ ist.

Nimmt man $|x| < \frac{1}{10}$ an, so läßt sich der Bruch nach oben durch

$$\frac{|3x+1|}{3|x+3|} < \frac{1 + \frac{3}{10}}{3(3 - \frac{1}{10})} = \frac{13}{3 \cdot 29} < \frac{1}{6}$$

abschätzen. Es ist $\frac{1}{6}|x| < \epsilon$ sicher dann, wenn $|x| < 6\epsilon$ gilt. Demnach ist das ϵ - δ Kriterium für $\delta(\epsilon) := \min\{6\epsilon, \frac{1}{10}\}$ erfüllt. Für $\epsilon := 10^{-3}$ ergibt das als mögliches (durchaus nicht weltmeisterliches) $\delta(10^{-3}) = 6 \cdot 10^{-3}$, welches zumindest das Beispiel ohne großen Aufwand löst.