

1 Angabe

Man bestimme die Menge V der Verdichtungspunkte der Folge $\{a_n\}$, wobei

$$a_n := (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \cdot \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}.$$

2 Lösung

Beh 1: Die Folge ist periodisch mit der Periode 24, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+24} = a_n$.

BW: Es genügt, die Periodizität von $(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$, $(-1)^n$ und $(-1)^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ nachzuweisen und wir vermerken die für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$ gültige Relation

$$\lfloor x + z \rfloor = \lfloor x \rfloor + z.$$

Es ist

$$(-1)^{\lfloor \frac{n+6}{3} \rfloor} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \cdot (-1)^2 = (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor},$$

und in ähnlicher Weise beweist man

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n,$$

bzw

$$(-1)^{\lfloor \frac{n+8}{4} \rfloor} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}.$$

Da das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 6, und 8 gleich 24 ist, gilt Beh.1.

Beh 2: Die Folge nimmt genau die Werte in $A := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ an.

BW: Eine Möglichkeit besteht darin, sich eine Tabelle für die Werte $n = 1, 2, \dots, 24$ zu verschaffen und das Ergebnis darin als Beh.2 abzulesen. Hier eine etwas kompaktere Überlegung. Es ist $a_n = b_n c_n + d_n$ mit $b_n := (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$, $c_n := \frac{1 + (-1)^n}{2}$ und $d_n := (-1)^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$. Da die Werte der Folge $\{b_n\}$ nur in $\{-1, +1\}$, die von $\{c_n\}$ in $\{0, 1\}$ und jene von $\{d_n\}$ in $\{-1, 1\}$ liegen, ist klar, daß die Werte der Folge $\{a_n\}$ in der Menge $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ liegen. Beh.2 ist gezeigt, wenn zu jedem Wert $a \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a$ angegeben werden kann. Es ist, um n zu finden mit $a_n = -2$ notwendig, daß n gerade ist (sonst verschwindet $b_n c_n$), weiters muss $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ungerade sein. Deshalb kann unser gerades n nur die Gestalt $n = 6l + 4$ haben. Da auch $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ ungerade sein muß, ist unser gerades n auch von der Gestalt $n = 8k + j$ mit $j \in \{4, 6\}$. Das führt auf $n = 4$ als Kandidaten. Man findet schlussendlich:

$$a_4 = -2, \quad a_5 = -1, \quad a_6 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2.$$

Beh 3: Die Menge $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ besteht aus Verdichtungspunkten, d.h. $A \subseteq V$.

BW: Es sei $j : A \rightarrow \mathbb{N}$ durch die Tabelle

| | | | | | |
|--------|----|----|---|---|---|
| a | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $j(a)$ | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |

definiert. Die Funktion ist wegen Beh.2 so konstruiert, daß für alle $a \in A$ stets $a_{j(a)} = a$ gilt. Für jedes $a \in A$ ist deshalb $\{a_{j(a)+24k}\}$ eine lediglich den Wert a annehmende, mithin konstante gegen a konvergente Teilfolge. Somit ist $a \in V$.

Beh 4: Es ist $V \subseteq A$.

BW: Es sei $v \in V$ ein Verdichtungspunkt der Folge $\{a_n\}$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}$, die gegen v konvergiert. Da

$$L := \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{j=0}^{23} \{j + 24k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

gilt, L unendlich viele Elemente hat, und auf der rechten Seite eine Partition von \mathbb{N} in endlich viele Klassen (nämlich 24) gegeben ist, muß es eine Klasse geben, die unendlich viele Elemente von L enthält, d.h. es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq j \leq 23$ sodaß

$$L \cap \{j + 24k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

unendlich ist (man kann es auch so sehen: Man betrachtet die Reste der Zahlen n_k bei Division durch 24. Da es nur 24 mögliche Reste gibt, muß es unendlich viele Zahlen n_k geben, die den selben Rest, das j annehmen). Es sei $l \mapsto n_{k_l}$ eine streng monotone Funktion mit

$$L \cap \{j + 24k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{n_{k_l} \mid l \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $m_{n_{k_l}} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derart, daß $n_{k_l} = 24 \cdot m_{n_{k_l}} + j$. Deshalb ist $a_{n_{k_l}} = a_j$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Somit ist die Teilfolge $\{a_{n_{k_l}}\}$ einerseits konstant, also konvergent gegen $a_j \in A$, andererseits konvergent gegen $v \in V$. Deshalb ist $a_j = v$, also $v \in A$.