

1 Angabe

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n^4)} (x-1)^{(n^2)}.$$

2 Lösung

Es wird behauptet, daß die Reihe nur für $x = 1$ konvergent sein kann.

BW.: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß es ein $x \neq 1$ gibt, für welches die Reihe konvergiert. Als Konsequenz des Cauchyriteriums bilden die Glieder der Reihe eine Nullfolge. Es ist $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ (als Konsequenz der Bernoullischen Ungleichung $(1+h)^n \geq 1+nh$ für $-1 \leq h$, in diesem Fall mit $h := \frac{1}{n}$), sodaß

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n^4)} (x-1)^{(n^2)} \right| \geq (2^n |x-1|)^{(n^2)}$$

folgt. Da $|x-1| \neq 0$ ist, wird der auf der rechten Seite der Gleichung in Klammer stehende Ausdruck betragsmäßig größer als 1, falls nur n hinreichend groß ist (da $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$). Somit bilden die Glieder der Reihe keine Nullfolge, im Widerspruch zur Annahme.