

1 Angabe

Ist B abzählbare Teilmenge der Menge A und $C_A(B)$ von unendlicher Mächtigkeit, so zeige man, daß es eine Bijektion zwischen A und $C_A(B)$ gibt.

2 Lösung

Die Lösungsidee ist wie folgt:

1. Wir stellen uns $C_A(B) = A \setminus B$ als Scheibe vor mit einem Loch, in welchem B fehlt. Irgendwie wollen wir $C_A(B)$ so ‘ausdehnen’, daß ganz A herauskommt.
2. Dazu wählen wir zwei abzählbare, disjunkte Teilmengen C und D von $C_A(B)$.
3. Mittels C ‘stopfen’ wir das Loch B , und D wird ‘aufgeblasen’, um ‘mit der einen Hälfte’ D und mit der anderen das ins B geschlüpfte C zu ersetzen. Da die Mengen alle abzählbar unendlich sind, geht das.

Nun zur etwas formaleren Beschreibung. Zunächst wähle man in $C_A(B) = A \setminus B$ abzählbare, zueinander disjunkte Teilmengen C und D (das geht, indem man z.B. eine abzählbare Teilmenge L findet, sie numeriert und dann z.B. C die Teilmenge mit geraden, und D jene mit ungeraden Nummern sein läßt). Wegen der Abzählbarkeit der entsprechenden Mengen gibt es Bijektionen $\gamma : C \rightarrow B$ und $\delta : D \rightarrow C \cup D$. Nun definiert man eine Funktion $\phi : A \setminus B \rightarrow A$ durch

$$\phi(a) := \begin{cases} \gamma(a) & \text{falls } a \in C \\ \delta(a) & \text{falls } a \in D \\ a & \text{falls } a \in A \setminus (C \cup D) \end{cases}$$

Man überlegt sich nun leicht, daß ϕ eine Bijektion zwischen den Mengen $C_A(B) = A \setminus B$ und A ist.