

1 Angabe

Es ist zu zeigen, daß für jede monotone Folge $\{a_n\}$ positiver reeller Zahlen die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jene von $\{ka_k\}_{k=1}^{\infty}$ gegen Null bei $k \rightarrow \infty$ nach sich zieht.

2 Lösung

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen des Cauchyriteriums gibt es N sodaß für alle Zahlen $k \geq N$ und alle $p \in \mathbb{N}$ stets $\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon$ gilt. Ist insbesondere $p = k$, bzw. $p := k + q$ und berücksichtigt man $a_{k+p} \leq a_k$, so ergibt sich sofort $\epsilon > \sum_{n=k+1}^{2k} a_n \geq ka_{2k}$, bzw. $\epsilon > (k+1)a_{2k+1}$, also sind $\{ka_{2k}\}$ und $\{(k+1)a_{2k+1}\}$ Nullfolgen. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen und der Tatsache daß $\{a_k\}$ Nullfolge ist, ergibt sich, daß $\{2ka_{2k}\}$ und $\{(2k+1)a_{2k+1}\}$ beides Nullfolgen sind, und daher ist $\{ka_k\}$ eine Nullfolge.