

1 Angabe

Man bestimme $\inf T$ und $\sup T$ (auch $\pm\infty$ ist zulässig) im angeordneten Körper \mathbf{Q} für die Menge $T := \{\frac{k^2-n}{k+1} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$.

Beh.1: $\sup T = +\infty$.

BW. indirekt. Angenommen T ist nach oben beschränkt. Dann gibt es ein $C \in \mathbf{Q}$ mit $t \leq C$ für alle $t \in T$. Insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und n von der Form $n := 1$ die Ungleichung

$$k+1 = \frac{k^2-1}{k+1} \leq C$$

im Widerspruch zur Unbeschränktheit nach oben von \mathbb{N} .

Beh.2: $\inf T = -\infty$.

BW. indirekt. Angenommen T ist nach unten beschränkt. Dann gibt es ein $C \in \mathbf{Q}$ mit $C \leq t$ für alle $t \in T$. Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $k := 1$ die Ungleichung

$$C \leq \frac{1-n}{2},$$

die durch Äquivalenzumformungen zu

$$n \leq 1 - 2C$$

wird, ein Widerspruch zur Unbeschränktheit nach oben von \mathbb{N} .