

1 Angabe

Man untersuche, ob es eine reelle Folge $\{a_n\}$ gibt, deren Menge V der Verdichtungspunkte mit dem Intervall $[0, 1]$ übereinstimmt.

2 Lösung

Wir wollen zeigen, daß es tatsächlich eine Folge mit dieser Eigenschaft gibt:

Die Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist abzählbar und daher gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Als Kandidaten definieren wir eine Folge $\{a_n\}$ durch $a_n := f(n)$.

Beh 1: $[0, 1] \subseteq V$.

BW: Sei $x \in [0, 1]$ beliebig und $\epsilon > 0$. Es ist zu zeigen, daß es in $I_\epsilon := (x - \epsilon, x + \epsilon)$ unendlich viele Folgenglieder gibt. Wenn wir zeigen können, daß $I_\epsilon \cap \mathbb{Q}$ unendlich ist, so müssen deren Elemente als Folgenglieder von $\{a_n\}$ auftreten, und somit ist $x \in V$. Ist $0 < x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, dann ist $\{x - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cap I_\epsilon$ unendlich, falls $x = 0$ so ist $I_\epsilon \cap \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ unendlich. Ist hingegen $x \in [0, 1]$ irrational, so betrachtet man eine beliebige Folge $\{b_n\}$ von endlichen Dezimalbrüchen, welche gegen x konvergiert. Man kann es so einrichten, daß alle Folgenglieder von $\{b_n\}$ paarweise verschieden sind. Dann ist die Menge $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap I_\epsilon \cap [0, 1]$ unendlich.

Beh 2: $V \setminus [0, 1] = \emptyset$. *Mit anderen Worten* $V \subseteq [0, 1]$.

BW: Wenn $x \notin [0, 1]$, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $I_\epsilon \cap [0, 1] = \emptyset$ (Skizze zur Veranschaulichung bitte selbst anfertigen). Deshalb ist $I_\epsilon \cap \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \emptyset$ und somit kann kein einziges Folgenglied von $\{a_n\}$ in I_ϵ liegen. Somit ist $x \notin V$, wie behauptet.

Die beiden Behauptungen ergeben den Beweis daß $V = [0, 1]$ gilt.