

1 Angabe

Sei $a_{n+1} := \sqrt{a_n(a_{n-1} + 4) + \frac{1}{n} + 1} - 2$. Man untersuche die Konvergenz der Folge in Abhängigkeit von Startwerten (a_1, a_2) .

2 Lösung

Hilfsatz: Die Folge $\{a_n\}$ ist für keine Vorgabe von Startwerten $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ definiert. Die Frage nach der Konvergenz stellt sich **nicht**.

158 ist ein *inkorrekt gestelltes Problem*. Den Beweis führen wir indirekt und nehmen an, daß es Startwerte $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gibt, für welche die Folge $\{a_n\}$ wohldefiniert ist (d.h. ganz einfach, daß alle Folgenglieder in \mathbb{R} mittels der Rekursion ‘berechnet’ werden können). Es sollen jetzt Konsequenzen (Beh.1 und 2) hergeleitet werden, und aus ihnen ein Widerspruch.

Beh.1: Für alle $n \geq 4$ ist $a_n \geq 0$.

BW. Zunächst ist aus der Rekursion selbst $a_{n+1} + 2 \geq 0$ für $n \geq 2$ abzulesen. Somit ist für $n \geq 4$ stets $a_{n-1} \geq -2$, also auch $a_{n-1} + 4 \geq 2$. Da der Radikand nichtnegativ ist, ergibt sich für $n \geq 4$ die Abschätzung

$$a_n \geq -\frac{\frac{1}{n} + 1}{a_{n-1} + 4} > -1.$$

Angenommen, es gibt ein $n \geq 4$ mit $a_n < 0$. Für jedes solche n ergibt sich aus der Rekursion unmittelbar $a_{n+1} < 0$, also $a_j < 0$ für alle $j \geq n$. Abschätzen des Radikanden durch $3 + 4a_n$ ergibt für alle $n \geq 4$ die Abschätzung

$$0 \leq a_{n+1} + 2 < \sqrt{3 + 4a_n}.$$

Quadrieren und Weglassen von a_{n+1}^2 auf der linken Seite ergibt

$$4a_{n+1} + 4 < 3 + 4a_n,$$

also $a_{n+1} < a_n - 1$, was in Hinblick auf $a_n > -1$ nicht für alle $n \geq 4$ gelten kann. Ein Widerspruch.

Beh.2: Für jedes $n \geq 4$ und $C \geq 0$ mit $a_{n-1} \leq C$ und $a_n \leq C$ gilt auch $a_{n+1} < \sqrt{C^2 + 4C + 2} - 2$ und $a_{n+2} < \sqrt{C^2 + 4C + 2} - 2$. Insbesondere ist $\{a_n\}$ beschränkt.

BW: Zunächst hat man eine Abschätzung

$$a_{n+1} \leq \sqrt{C^2 + 4C + \frac{1}{n} + 1} - 2 < \sqrt{C^2 + 4C + 2} - 2 < \sqrt{C^2 + 4C + 4} - 2 = C.$$

Nun treffen die Voraussetzungen der Behauptung auch auf n und $n + 1$ zu, woraus die Aussage für a_{n+2} gefolgert werden kann. Als Schranke der Folge eignet sich

$$C := \max\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}.$$

Herleitung eines Widerspruchs:

Es sei C eine Schranke für alle $n \geq 4$. Rekursiv werde $C_1 := C$ und $C_{k+1} := \sqrt{C_k^2 + 4C_k + 2} - 2$ gesetzt. Vollständige Induktion unter Verwendung von Beh.2 ergibt $a_{2+2k} \leq C_k$ für $k \in \mathbb{N}$ (bitte selbst ausführen). Wegen Beh.1 ist $C_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sichtlich ist die Folge $\{C_k\}$ wegen Beh.2 streng monoton fallend. Somit sollte $\{C_k\}$ bei $k \rightarrow \infty$ einen Grenzwert, nennen wir ihn $c \in [0, C]$ haben. Rechenregeln für Grenzwerte liefern die in \mathbb{R} unlösbare Gleichung

$$c^2 + 4c + 2 = (c + 2)^2,$$

ein Widerspruch.

Nachbemerkingen:

- Prüfen der Konvergenz der Folge ist zwar hübsch, aber leider **sinnlos**! Die Folge ist schließlich als solche nicht definiert. Als Formulierung einer Aufgabe, welche diese sinnlose Übung als Antwort akzeptiert, ist die folgende:
Man stelle fest, für welche a_1, a_2 die durch obige Rekursion definierte Folge $\{a_n\}$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt.

Jetzt braucht man die obige Diskussion nicht zu führen, sondern wendet die Grenzwertregeln an, indem man aus der aus der Rekursion folgenden Beziehung (Wurzel ‘weggeschafft’)

$$(a_{n+1} + 2)^2 = a_n(a_{n-1} + 4) + \frac{1}{n} + 1$$

die in \mathbb{R} unlösbare Gleichung

$$(a + 2)^2 = a(a + 4) + 1$$

herleitet.

Als negatives Resultat kann diese Antwort durchaus ausreichend sein, wenn man z.B. nur grundsätzlich an der Konvergenz in \mathbb{R} interessiert ist.

- Die Folge $\{a_n\}$ ist *nicht* von der auf Seite 44 angegebenen Bauart. Die rekursive Struktur ist insofern komplizierter, als statt *einer* Funktion f eine Folge $\{f_n\}$ benützt wird:

Gegeben $f_n : D_n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $f_n(x, y) = \sqrt{y(x + 4) + \frac{1}{n} + 1} - 2$ und $D_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x + 4) + \frac{1}{n} + 1 \geq 0\}$ ist. Sind dann a_1, a_2 vorgegeben, wird

$$a_{n+1} := f_n(a_{n-1}, a_n)$$

definiert.