

1 Angabe

Es werde jene Teilfolge $\{n_k\}$ der Folge $\{n\}$ betrachtet, für welche die dekadische Ziffernentwicklung von n_k genau 2 Nullen enthält. Man zeige daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$$

konvergiert.

2 Lösung

Beh 1: Sei $f(l) := \binom{l-1}{2} 9^{l-2}$. Es gibt $f(l)$ genau l -stelliger Zahlen mit 2 Nullen. Jede von ihnen ist größer als 10^{l-1} .

BW: Wenn m eine solche Zahl ist, kommt sie wie folgt zustande: Zunächst dürfen aus $l-1$ Stellen 2 Stellen gewählt werden (die führende Stelle darf nicht Null sein). Danach dürfen die übrigen Stellen mit 9 Ziffern belegt werden. Somit hat man $\binom{l-1}{2} 9^{l-2}$ Zahlen dieser Form. Die kleinste unter ihnen ist von der Form

$$1001 \dots 1 > 10^{l-1}.$$

Beh 2: Es gibt ein $C > 0$, sodaß für alle $N \in \mathbb{N}$ die Partialsumme $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{n_k}$ durch C beschränkt ist. Die Reihe konvergiert.

BW: Es sei $F(N) := \sum_{l=2}^N f(l)$, wobei $f(l)$ wie in Beh.1 ist. Dann reicht es, die Beschränktheit aller Partialsummen $S_{F(N)}$ nachzuweisen.

Es ist wegen Beh.1

$$S_{F(N)} \leq \sum_{l=1}^N \binom{l-1}{2} 9^{l-2} \frac{1}{10^{l-1}}.$$

Definieren eine Folge $\{b_l\}$ durch

$$b_l := \binom{l-1}{2} 9^{l-2} \frac{1}{10^{l-1}},$$

so ergibt eine Anwendung des Quotientenkriteriums die absolute Konvergenz von $C := \sum_{l=1}^{\infty} b_l$. Dann ist für dieses C die Behauptung erfüllt.

Da die Reihe nur positive Glieder hat, ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend. Sie ist beschränkt, also konvergent.