

1 Modifizierte Angabe

Es sei $M := [1, 4] \setminus \{2\}$ und

$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{5}}{x - 2}.$$

Man zeige, daß es keine *Lipschitzkonstante* λ für f auf M , d.h. es kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x, y \in M : |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

gibt.

Weiters zeige man, daß f auf M gleichmäßig stetig ist.

2 Lösung

Beh 1: Die Funktion

$$g(x) := \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{5}}$$

ist auf $[1, 4]$ stetig und die Einschränkung auf M stimmt mit f überein.

Bew: Durch elementares Umformen.

Anmerkung: Jede Lipschitzkonstante λ für g auf $[1, 4]$ ist eine für f auf M . Umgekehrt, aus Stetigkeitsgründen ist jede L-Konstante von f auf M eine solche für g auf $[1, 4]$. Es genügt also zu zeigen, daß g keine L-Konstante besitzt.

Beh 2: Falls g eine L-Konstante λ auf $[1, 4]$ besitzt, so besitzt dort $N(x) := \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{5}$ die L-Konstante $\lambda + \frac{\sqrt{21} + \sqrt{5}}{5}$.

Bew: Durch 'Einschieben' von Termen und Benützen der Dreiecksungleichung findet man unter Beachtung von $|N(x)| = |\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{5}| \geq \sqrt{5}$, $|x| \leq 4$, $|y| \leq 4$ und $|N(x)| \leq \sqrt{21} + \sqrt{5}$ (die Funktion ist monoton wachsend auf $[1, 4]$) für alle $x, y \in M$

$$\begin{aligned} & |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y| \\ \Rightarrow & \left| \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{5}} - \frac{y + 4}{\sqrt{y^2 + 2y - 3} + \sqrt{5}} \right| \leq \lambda |x - y| \\ \Rightarrow & |(x + 4)N(y) - (y + 4)N(x)| \leq 5\lambda |x - y| \\ \Rightarrow & |(x + 4)(N(y) - N(x))| - |(x + 4)N(x) - (y + 4)N(x)| \leq 5\lambda |x - y| \\ \Rightarrow & |x + 4||N(y) - N(x)| \leq 5\lambda |x - y| + |N(x)||x - y| \\ \Rightarrow & |N(x) - N(y)| \leq \frac{1}{5}(5\lambda |x - y| + (\sqrt{21} + \sqrt{5})|x - y|) \\ \Rightarrow & |N(x) - N(y)| \leq \left(\lambda + \frac{\sqrt{21} + \sqrt{5}}{5} \right) |x - y|, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Beh 3: Die Funktion $N(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{5}$ besitzt auf $[1, 4]$ keine L-Konstante.

Bew: Angenommen μ ist eine L-Konstante für $N(x)$ auf $[1, 4]$. Dann gilt für alle $x, y \in [1, 4]$ mit $x \neq y$ die folgende Kette von Implikationen:

$$\begin{aligned} & |N(x) - N(y)| \leq \mu|x - y| \\ \Rightarrow & |\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{y^2 + 2y - 3}| \leq \mu|x - y| \\ \Rightarrow & |x^2 + 2x - 3 - (y^2 + 2y - 3)| \leq \mu|x - y|(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{y^2 + 2y - 3}) \\ \Rightarrow & |x + y + 2| \leq \mu(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{y^2 + 2y - 3}). \end{aligned}$$

Indem man $y := 1$ setzt, gewinnt man für alle $x \neq 1$

$$|x + 1 + 2| \leq \mu\sqrt{x^2 + 2x - 3}.$$

Nun beachtet man daß links und rechts auf ganz $[1, 4]$ stetige Funktionen vorliegen, sodaß die Ungleichung auch für $x = 1$ gelten muß, was auf den Widerspruch

$$4 \leq 0$$

führt.

Beh 4: g ist auf $[1, 4]$ gleichmäßig stetig.

Bew: g ist auf dem kompakten Intervall $[1, 4]$ stetig, somit ergibt der Satz von Weierstraß (Seite 72), daß g auf $[1, 4]$ gleichmäßig stetig ist.

Anmerkung: Es ist g ein Beispiel einer auf $[1, 4]$ gleichmäßig, aber nicht Lipschitzstetigen Funktion. Ein einfacheres Beispiel wäre $g(x) := \sqrt{x}$ auf $I := [0, 1]$ (bitte skizzieren!) wie die folgende Kette von Implikationen für $x \neq y$

$$\begin{aligned} & |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \lambda|x - y| \\ \Rightarrow & |x - y| \leq \lambda|x - y|(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ \Rightarrow & 1 \leq \lambda(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \end{aligned}$$

woraus sich ähnlich wie oben ($y := 0$) der Widerspruch

$$1 \leq 0$$

ergibt.

Anmerkung: Das Beispiel wird nachträglich angerechnet.