

1 Angabe

Man zeige für $|x| \leq 1$ die Beziehung

$$2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

2 Lösung

Es sei $f(x) := 2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Beh 1: $f'(x) = 0$ für alle x mit $|x| < 1$.

BW.: f ist auf $(-1, 1)$ definiert und dort stetig differenzierbar (weil $\frac{2x}{1+x^2}$ betragsmäßig kleiner als 1 im angegebenen Intervall ist, kann die Kettenregel verwendet werden). Differentiation ergibt die Behauptung.

Beh 2: $f(x) = 0$ für alle $x \in (-1, 1)$.

BW.: Es ist $f(0) = 0$ und f auf $(-1, 1)$ konstant, weil dort die Ableitung verschwindet.

Beh 3: $f(1) = f(-1) = 0$.

BW.: Es ist f als zusammengesetzte Funktion auf $[-1, 1]$ stetig (einseitige Grenzwerte betrachtend). Diese einseitigen Grenzwerte sind Null, also gilt die Behauptung.

Anmerkung: Wie kommt man auf diese Identität?

Es sei $\tan \frac{y}{2} = x$, also $y = 2 \arctan x$. Man hat folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} \sin y &= 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} \\ &= 2 \tan \frac{y}{2} \cos^2 \frac{y}{2} \\ &= 2 \tan \frac{y}{2} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \frac{y}{2}}} \\ &= 2 \tan \frac{y}{2} \frac{1}{\frac{\sin^2 \frac{y}{2} + \cos^2 \frac{y}{2}}{\cos^2 \frac{y}{2}}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{y}{2}}{\tan^2 \frac{y}{2} + 1} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich, den arcsin auf beiden Seiten anwendend, die obige Identität, falls $|x| \leq 1$ ist.