

1 Angabe

Für die Folge $\{a_{nk}\}$ gegeben durch $a_{nk} := \frac{k^2+k+n}{k^2+n}$ bestimme man die Grenzübergänge für jeweils n bzw. k nach Unendlich. Man untersuche, ob einer der beiden Grenzübergänge gleichmäßig bezüglich der anderen Variablen ist.

2 Lösung

Beh 1: *Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{nk} = 1$.*

BW.: Anwendung der Rechenregeln für konvergente Folgen.

Beh 2: *Der Grenzübergang für $k \rightarrow \infty$ ist gleichmäßig in n .*

BW.: Man hat zu zeigen, daß zu jedem $\epsilon > 0$ ein K mit

$$|a_{nk} - 1| < \epsilon$$

für alle $k > K$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert:

Es ist die Abschätzung

$$|a_{nk} - 1| = \frac{k}{k^2 + n} < \frac{1}{k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig, sodaß für $K := \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ die gestellte Forderung erfüllt ist.

Beh 3: *Der Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ ist gleichmäßig in k .*

BW.: Die Vorgangsweise ist ähnlich wie vorhin. Die Abschätzung

$$|a_{nk} - 1| = \frac{k}{k^2 + n} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

(auf die man kommt, wenn man man “mittelschulmäßig” die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+n}$ am Maximum – gemäß DR ausgewertet, und die man mittels Äquivalenzumformungen beweist) ist hilfreich.