

1 Angabe

Unter Zuhilfenahme der Potenzreihenentwicklung der entsprechenden *elementaren* Funktionen bestimme man den Grenzwert von $f(x) := \frac{x \cos x - \sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

2 Lösung

Es ist

$$x \cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

sodaß der Zähler die Reihenentwicklung (bis Glieder 3.ter Ordnung)

$$x \cos x - \sin x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

hat. Im Zähler findet man

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \left(\frac{x}{2} + o(x) \right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + o(x^3).$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{4}x^2 + o(x^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x + o(x^2)}{\frac{1}{4} + o(x)}, \end{aligned}$$

sodaß der Zähler gegen 0 und der Nenner gegen $\frac{1}{4}$ strebt. Somit ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$