

1 Angabe

Es sei $a_n := (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$. Zeigen Sie, daß $\sum_{a=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Für

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1. finde man ein “womöglich relativ kleines” k , sodaß $|s - s_k| < 10^{-3}$ gilt.
2. stelle man fest, ob $s_k \geq s$ oder $s_k \leq s$ gilt.

2 Lösung

Beh. 1: *Die Reihe konvergiert absolut.*

BW: Es ist

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} && \text{Einsetzen im Ausdruck, der im} \\ & && \text{WK zu bestimmen ist} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} && \text{Vereinfachen und Ersetzen von} \\ & && \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \text{ durch } \lim_{n \rightarrow \infty}, \text{ was} \\ & && \text{gerechtfertigt ist, falls Letzterer} \\ & && \text{existiert} \\ &= \frac{1}{2} && \text{Der vorige Schritt ist im nach-} \\ & && \text{hinein durch die Existenz des} \\ & && \text{GW gerechtfertigt} \\ &< 1 && \text{Somit ist die Reihe absolut kon-} \\ & && \text{vergent.} \end{aligned}$$

Beh 2: $c_n := (-1)^{\frac{n^2+n}{2}}$ erfüllt $c_{n+4} = c_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) und es ist $c_4 = c_3 = -c_1 = -c_2 = 1$.

BW: durch explizites Nachrechnen. Es sei angemerkt, daß Beh. 1 in “hoch wissenschaftlicher Manier” besagt, daß die Vorzeichenfolge der Glieder der Reihe

$$- - + + - - + + - - + + - - \dots$$

ist.

Beh 3: Für $n > 4$ gilt

$$\frac{n}{2^n} > \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

BW: Durch Äquivalenzumformungen.

Beh 4: Für $k \geq 1$ gilt

$$s_{4k+2} < s_{4k+3} < s_{4k+6} < s_{4k+7} < s_{4k+5} < s_{4k+4} < s_{4k+1} < s_{4k}.$$

BW: Aus Beh 2 und Beh 3.

2.1 Antwort zu Frage 2

Aus Beh 4 findet man für alle $k \in \mathbb{N}$, daß $s < s_{4k}$, $s < s_{4k+1}$, jedoch $s_{4k+2} < s$ und $s_{4k+3} < s$ gelten muß.

2.2 Antwort zu Frage 1

Die Reihe mit Gliedern $c_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ ist sichtlich eine alternierende Reihe mit dem gleichen Grenzwert. Für sie gilt als Fehlerschätzung

$$|s - S_n| < c_{n+1},$$

wobei $S_n := \sum_{l=1}^n c_n$ gelte (Aufgrund der vorliegenden Situation könnte man auch durch Besseres, z.B. durch $c_{n+1}/2$ abschätzen). Deshalb will man

$$\frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} < 10^{-3}$$

erreichen, was gleichbedeutend zu

$$10^3 < \frac{2^{2k+1}}{6k+4}$$

ist. Wie man leicht feststellt, gilt die Ungleichung

$$10^3 < \frac{2^{l+1}}{3l+1}$$

ab $l = 12$. Deshalb ist obige Bedingung ab $k = 6$ erfüllbar. Somit ist der Fehler in der ursprünglichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ unterhalb von 10^{-3} sicher dann, wenn $n \geq 12$ gilt.