

1 Angabe

Zeigen Sie, daß jeder unendliche Dezimalbruch der Form

$$x = a_0, a_1 \cdots a_k \dot{a}_{k+1} \cdots \dot{a}_{k+1+n}$$

mit einer Vorperiode der Länge $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und der Periodenlänge $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl darstellt.

(Hinweis: vergleichen Sie die durch den periodischen Dezimalbruch $1, \dot{0}0 \cdots \dot{0}1$ (Vorperiode der Länge 0 und Periode der Länge n) dargestellte Zahl s mit $10^n s$).

2 Lösung

Da Multiplikation einer Zahl mit 10^l eine ‘Verschiebung’ ihrer Dezimalbruchdarstellung um l Stellen nach links bewirkt, findet man für $l = n$:

$$10^n s = 10^n + s.$$

Dann ist $s = \frac{10^n}{10^n - 1}$ als Quotient natürlicher Zahlen in \mathbb{Q} .

Es ist

$$\begin{aligned} 10^k x &= a_0 10^k + \sum_{j=1}^k a_j 10^{j-1} + 0, \dot{a}_{k+1} \cdots \dot{a}_{k+1+n} \\ &= a_0 10^k + \sum_{j=1}^k a_j 10^{j-1} + \sum_{j=1}^k \frac{s}{10^j}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ergibt sich als Summe von ganzen Zahlen und Quotienten ganzer Zahlen, sodaß $10^k x \in \mathbb{Q}$ folgt. Da man in \mathbb{Q} durch 10^k dividieren kann, ist $x \in \mathbb{Q}$.