

1 Angabe

Es seien r und s Relationen auf A , d.h. Teilmengen von $A \times A$. Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel, daß die Antisymmetrie (bzw. die Vergleichbarkeit von je zwei Elementen in A) bezüglich Relationen r und s auf A jene von $r \circ s$ nach sich zieht.

2 Lösung

Beh 1: Auf $A := \{1, 2, 3\}$ sind die Relationen $r := \{(1, 3), (2, 3)\}$ und $s := \{(3, 1), (3, 2)\}$ beide antisymmetrisch, jedoch $r \circ s = \{(1, 1), (2, 2), \underline{(1, 2)}, \underline{(2, 1)}\}$ nicht.

BW.: Die unterstrichenen Paare widerlegen die Antisymmetrie von $r \circ s$.

Beh 2: Bezüglich $r \circ s$ sind je zwei Elemente in A stets vergleichbar.

BW.: Man wähle $x, y \in A$ beliebig aus. Dann muß man $(x, y) \notin r \circ s \Rightarrow (y, x) \in r \circ s$ zeigen. Wäre $(x, y) \in s$ so würde $(x, x) \in r$ sofort $(x, y) \in r \circ s$ nach sich ziehen. Deshalb muß $(y, x) \in s$ gelten. Da $(y, y) \in r$ ist, ergibt sich $(y, x) \in r \circ s$.