

1 Angabe

Es sei $f(x) := 0$ für irrationales x und $f\left(\frac{z}{n}\right) := \frac{(-1)^n n}{n+1}$ falls $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ relativ prim zueinander sind. Ist f gerade? Ist f ungerade? Ist f periodisch? Ist f beschränkt?

2 Lösung

Zunächst muß man sich klar machen, daß f *wohldefiniert* ist. D.h. es sollte jedes $x \in \mathbb{R}$ nur ein *Funktionswert* $f(x)$ zugeordnet sein. Für irrationales x ist dies klar, nämlich 0. Wenn x rational ist, überlegt man sich, daß es genau ein Paar $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt, derart daß $x = \frac{z}{n}$ und z und n relativ prim sind. Die Eindeutigkeit von z und n mit den genannten Eigenschaften soll im Weiteren kommentarlos verwendet werden.

Beh 1: f ist gerade.

BW: Ist x irrational, so auch $-x$, sodaß $f(x) = 0 = f(-x)$ gilt. Sei $x = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ relativ prim zueinander. Dann sind auch $-z$ und n relativ prim zueinander, sodaß

$$f\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{(-1)^n n}{n+1} = f\left(-\frac{z}{n}\right).$$

Beh 2: f ist nicht ungerade.

BW: Es genügt, ein einziges x mit $f(x) \neq -f(-x)$ anzugeben. Sei $x = 1$, so ist $z = 1 = n$ und $f(x) = -\frac{1}{2}$, jedoch $-f(-x) = \frac{1}{2}$.

(Gibt es Funktionen, die sowohl gerade, als auch ungerade sind?)

Beh 3: Für alle reellen x gilt $f(x+1) = f(x)$, m.a.W., die Funktion f ist periodisch mit Periode 1.

BW.: Für irrationales x hat man auf beiden Seiten der zu zeigenden Gleichung stets 0. Für rationales $x = \frac{z}{n}$ ist mit z und n relativ prim auch $z+n$ und n relativ prim:

Falls nämlich $z+n = da$ und $n = db$ für ganze Zahlen d, a, b gilt, so ergibt sich $z = d(a-b)$, sodaß z und n ebenfalls den gemeinsamen Teiler d hätten.

Somit ist

$$f\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{(-1)^n n}{n+1} = f\left(\frac{z+n}{n}\right) = f\left(\frac{z}{n} + 1\right).$$

Beh 4: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 < f(x) < 1$, m.a.W., -1 ist untere und $+1$ obere Schranke.

BW.: Für irrationales x ist $f(x) = 0$, also gilt die Behauptung für solches x . Für $x = \frac{z}{n}$ mit relativ primen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\left| f\left(\frac{z}{n}\right) \right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$