

1 Angabe

Man bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für

$$a_n := \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3 + n^2} - n.$$

2 Lösung

Ein Lösungsweg, der die Anwendung der Summenformel im Zähler des ersten Bruches vermeidet, besteht darin, den Bruch umzuformen und den Satz von Stolz anzuwenden (die erforderliche Monotonie $N_n \uparrow \infty$ ist leicht erkennbar):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sum_{j=1}^n j^3 - n^4 - n^2}{n^3 + n^2} =: \frac{Z_n}{N_n} \\ \frac{Z_n - Z_{n-1}}{N_n - N_{n-1}} &= \frac{n^3 - n^4 - n^2 + (n-1)^4 + (n-1)^2}{n^3 + n^2 - (n-1)^3 - (n-1)^2} \\ &= \frac{n^3 - (n^2 + (n-1)^2 + 1)(2n-1)}{n^2 + n(n-1) + (n-1)^2 + (2n-1)} \\ &= n \frac{1 - (1 + (1 - \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n^2})(2 - \frac{1}{n})}{1 + 1 - \frac{1}{n} - (1 - \frac{1}{n})^2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

Anwendung der Grenzwertregeln ergibt $a_n \rightarrow \frac{1-(1+1) \cdot 2}{1+1} = -\infty$.

Wohl ist die Rechnung etwas aufwendiger, als wenn man die Anleitung brav befolgt, die Methode selbst ist jedoch universeller.