

1 Angabe

Es sei $a_n(x) := \frac{(x+1)^{(n^2)}}{n \cdot 2^n}$ und die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ gegeben. Man bestimme den Konvergenzbereich der Funktionenreihe. Auf welchen Intervallen ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe gesichert? Wo ist die Grenzfunktion stetig?

2 Lösung

Beh 1: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-2, 0]$. Sie konvergiert in diesem Intervall gleichmäßig und absolut.

BW.: Die Reihe konvergiert für $x = -1$. Wollen das Raabekriterium (RK) anwenden für $x \neq -1$. Es ist

$$n \left(\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} - 1 \right) = \dots = n \left(\frac{2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{|x+1|^{2n+1}} - 1 \right).$$

Der Grenzwert des Ausdrucks auf der rechten Seite ist $+\infty$ falls $|x+1| \leq 1$ ist. Somit konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in [-2, 0]$.

Ist $|x+1| > 1$, so ist der entsprechende Grenzwert $-\infty$, sodaß lt. RK die Reihe für solche x nicht absolut konvergiert. Divergenz folgt somit für $x \in \mathbb{R}^+$. Das RK war hilfreich beim Auffinden des Konvergenzbereiches, jetzt erhofft man die Divergenz auch für $x < -2$ nachweisen zu können – das geht mit dem RK im vorliegenden Beispiel nicht.

Das Wurzelkriterium ergibt für solche x den Ausdruck

$$|a_n(x)|^{\frac{1}{n}} = \dots = \frac{|x+1|^n}{2^{\sqrt[n]{n}}},$$

von dem unschwer zu zeigen ist daß er für $|x+1| > 1$ gegen $+\infty$ konvergiert. Somit ist die Reihe für $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$ divergent.

Die gleichmäßige Konvergenz besagt für $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N mit

$$|S(x) - \sum_{n=1}^N a_n(x)| < \epsilon$$

für alle $x \in [0, 2]$ gibt.

Um dies zu zeigen, wähle man N mit

$$|S(0) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)| < \epsilon.$$

Da $|a_n(x)| \leq a_n(0) = \frac{1}{n \cdot 2^n}$ für alle $x \in [0, 2]$ ist, findet man

$$|S(x) - \sum_{n=1}^N a_n(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(0) = |S(0) - \sum_{n=1}^N a_n(0)| < \epsilon.$$