

## 1 Angabe

Es sei  $\{a_n\}$  eine Folge und  $\{b_n\}$  gegeben durch  $b_1 := a_1 + \frac{a_2}{2}$  beziehungsweise  $b_n := \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  für  $n > 1$ . Aus der Existenz von  $s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  folgere man die Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  gegen  $s$ .

Für  $a_n := \frac{1}{n^3}$  vergleiche man den Fehler

$$A_k := s - \sum_{n=1}^k a_n$$

mit dem Fehler

$$B_k := s - \sum_{n=1}^k b_n$$

bzw. mit  $B_{k+1}$ .

## 2 Lösung

**Beh 1:**  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergiert gegen  $s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

BW: Zwei Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , bzw.  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergieren gegen den gleichen Grenzwert  $s$  genau dann, wenn die Folgen  $\{s_k\}$  bzw.  $\{t_k\}$  definiert durch

$$s_k := \sum_{n=1}^k a_n$$

bzw.

$$t_k := \sum_{n=1}^k b_n$$

gegen  $s$  streben. Es ist für  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} t_k &= a_1 + \frac{a_2}{2} + \sum_{n=2}^k \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( 2a_1 + a_2 + \sum_{n=2}^k a_n + \sum_{n=2}^k a_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2a_1 + a_2 + \sum_{n=2}^k a_n + \sum_{n=3}^{k+1} a_n \right) \\ &= s_k + \frac{a_{k+1}}{2}. \end{aligned}$$

Da  $\{\frac{a_{k+1}}{2}\}$  auf Grund der Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Nullfolge ist, und die Summe konvergenter Folgen gegen die Summe der Grenzwerte strebt, haben  $\{s_n\}$  und  $\{t_n\}$  den Grenzwert  $s$ .

**Beh 2:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.

BW:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  ist eine hyperharmonische Reihe mit Exponent  $c = 3$ . Da  $c > 1$  ist, konvergiert die Reihe.

**Beh 3:** Für  $k \geq 2$  gilt  $A_k - B_k = \frac{a_{k+1}}{2} = \frac{1}{2(k+1)^3}$  und  $A_k - B_{k+1} = \frac{3}{2}a_{k+1} = \frac{3}{2(k+1)^3}$ .

BW: Elementare Rechnung.