

## 1 Angabe

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  mit  $f_n(x) := 1$  falls  $x \in [0, \frac{1}{n}]$  und  $f_n(x) := 0$  falls  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{1}{n}]$ . Für welche  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ein offenes Intervall  $I$  mit  $x \in I$  und  $\{f_n\}$  gleichmäßig konvergent für alle  $\xi \in I$ .

## 2 Lösung

**Beh 1:** Die Funktion konvergiert auf ganz  $\mathbb{R}$  gegen die Funktion, welche durch  $f(x) = 0$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 1$  definiert ist.

BW.: Es ist  $f_n(0) = 1$ , somit konvergiert die konstante Folge  $\{f_n(0)\}$  gegen  $f(0) = 1$ . Sei  $x \neq 0$ . Es gibt dann ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|x| > \frac{1}{N}$ . Dann ist  $|x| > \frac{1}{n}$  für alle  $n \geq N$  und somit ist für solche  $n$  der Wert von  $f_n(x) = 0$ . Deshalb konvergiert die Folge  $\{f_n(x)\}$  gegen  $f(x) = 0$ .

**Beh 2:** Zu jedem  $x \neq 0$  gibt es ein Intervall  $I$  mit  $x \in I$  und  $\{f_n\}$  gleichmäßig konvergent in  $I$ .

BW.: Es sei  $x \neq 0$  und  $a := \frac{|x|}{2}$ . Sei  $I := [x - a, x + a]$ . Für alle  $\xi \in I$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a > \frac{1}{n}$  ist dann

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| = |0 - 0| = 0,$$

sodaß die gleichmäßige Konvergenz auf  $I$  unmittelbar einsehbar ist.

**Beh 3:** Zu  $x = 0$  kann es kein Intervall wie unter Beh.2 geben.

BW.: Falls doch, müßte die Grenzfunktion  $f$  als gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen selbst stetig im Intervall  $I$  sein. Insbesondere an der Stelle 0, ein Widerspruch.