12.1.09

# Analysis UE

$\overline{XI}$, 228, 232, 295, 298, 302, 310

228) $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\qquad A = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$

$$s - \left(A + \sum_{n=1}^{k} c_n\right) \leq \frac{1}{10}\left(s - \sum_{n=1}^{k} a_n\right)$$

$$\overset{c_n = a_n - b_n}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} b_n \leq \frac{1}{10}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \leq \frac{1}{10} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \geq \frac{9}{10} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

(*) sicher erfüllt, wenn $b_n \geq \frac{9}{10} a_n$ gilt $\forall n \geq k$

$$\Rightarrow b_n \geq \frac{9}{10} a_n \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}(n+1)} \geq \frac{9}{10}$$

$$\Leftrightarrow 10n \geq 9n + 9 \Leftrightarrow n \geq 9 \Rightarrow k \leq 9$$

232) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{a_1 + \frac{a_2}{2}}_{b_1} + \underbrace{\frac{a_2 + a_3}{2}}_{b_2} + \underbrace{\frac{a_3 + a_4}{2}}_{b_3} + \dots$$

$$\overset{S.5 1/8}{=} a_1 + \frac{a_2 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_3}{2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = s$$

Leibnitzreihe

Fehler bei Ersetzen von $s$ durch $\sum_{n=1}^{k} a_n =: s_k$

$$\frac{|a_{k+1}|}{2} \leq |s - s_k| \leq \frac{|a_k|}{2} \quad \text{da } \{|a_n| - |a_{n+1}|\} \text{ monoton.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{k+1}}{2} = \frac{1}{2(k+1)} \leq |s - s_k| \leq \frac{1}{2k} = \frac{\frac{1}{k}}{2}$$

Fehler bei Ersetzen von $s$ durch $\sum_{n=1}^{k} b_n =: s_k'$

$$\frac{|b_{k+1}|}{2} \leq |s - s_k'| \leq \frac{|b_k|}{2} \quad \text{da } \{|b_n| - |b_{n+1}|\} \text{ monoton}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a_{k+1} + a_{k+2}|}{4} = \frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^{k+2}}{k+2}\right|}{4} = \frac{|(-1)^{k+1}(k+2) + (-1)^{k+2}(k+1)|}{4(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{|(-1)^{k+1}| \cdot (\cancel{k} + 2 - \cancel{k} - 1)}{4(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4(k+1)(k+2)} \leq |s - s_k'| \leq \frac{|b_k|}{2}$$

$$= \frac{\left|\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right|}{4} = \frac{|(-1)^k| (\cancel{k} + 1 - \cancel{k})}{4k(k+1)} = \frac{1}{4k(k+1)} \quad \forall k > 1$$

$$\Rightarrow |s - s_k'| < |s - s_k| \quad \forall k > 1$$

295)

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2+x^3} - \sqrt{3}\,x}$$

I. $2+x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$

II. $\sqrt{2+x^3} - \sqrt{3}\,x \neq 0 \quad \Rightarrow x \neq ?$

$\sqrt{2+x^3} - \sqrt{3}\,x = 0 \Leftrightarrow 2+x^3-3x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2) = 0$

$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x^2-2x-2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} + 1$

$\Rightarrow D(f) = \cancel{\mathbb{P}}\, [-\sqrt[3]{2}, \infty) \setminus \{1, 1+\sqrt{3}\}$

ges.: stetige Fortsetzung $f^*(x)$ auf $(-\infty, -\sqrt[3]{2}]$

$\cancel{f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{x-1}{0-\sqrt{3}\,x} = f^*(x)}$

$f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{-\sqrt[3]{2}-1}{0-\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} = f^*(-\sqrt[3]{2}) \Rightarrow f^*(x) = \frac{x-1}{-\sqrt{3}\,x} = \frac{1-x}{\sqrt{3}\,x}$

$f^*$ stetig, $D(f^*) = \mathbb{R}\setminus\{0\} \supset (-\infty, -\sqrt[3]{2}]$

(xx)

302) (+) $|f(x)-f(y)| = \cancel{\left| \frac{(1+x)^3-1}{x} - \frac{(1+y)^3-1}{y} \right| = \left| \frac{y(x^3+3x^2+3x) - x(y^3+3y^2+3y)}{xy} \right|}$

$= \cancel{\left| \frac{xy(x^2+3x+3-y^2-3y-3)}{xy} \right|} = |x^2+3x-3y-y^2|$

$= |(x+y)(x-y) + (x-y)\cdot 3| = |(x-y)\cdot(x+y+3)| = |x-y|\cdot|x+y+3| \leq \lambda\,|x-y|$

$x, y \in [-1, +1] \setminus \{0\} \Rightarrow \lambda \geq 5$

(+) $f(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x} = \frac{3x+3x^2+x^3}{x} = 3+3x+x^2$

(xx) für stetige Fortsetzung an $x=1$:

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2+x^3}-\sqrt{3}\,x} = \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{2+x^3}+\sqrt{3}\,x)}{\cancel{(x-1)}(x^2-2x-2)}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{-3} = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow f^{**}(x)$ muss $f^{**}(1) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ erfüllen.

stet. FS an $x = 1+\sqrt{3}$ nicht möglich, da Unstetigkeitsstelle 2. Art vorliegt.

298) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$

<u>Beh. 1:</u> $f(x)$ gerade

$$f(-x) = \frac{\sqrt{1+(-x)\sin(-x)} - \cos(-x)}{\left(\sin\frac{-x}{2}\right)^2} \overset{\substack{\cos \text{ ger.} \\ \sin \text{ unger.}}}{=} \frac{\sqrt{1+(-x)(-\sin x)} - \cos x}{\left(-\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2} = f(x)$$

$f(x)$ gerade $\Rightarrow$ betrachte i.d.F. nur noch $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

<u>Beh. 2:</u> Sei $Z(x) := \sqrt{1+x\sin x} - \cos x$ und $N(x) := \sin^2\frac{x}{2}$, dann ist $D(Z) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} (x_{2k-1}, x_{2k})$ und $D(N) = \mathbb{R}^+ \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$

~~$\Rightarrow D(f) = D\left(\frac{Z}{N}\right) = D(Z) \cap D(N)$~~

$D(Z) = D(g)$ für $g(x) := \sqrt{1+x\sin x}$

$x \notin D(g) \Leftrightarrow 1 + x\sin x < 0 \Leftrightarrow x\sin x < -1$

$x = 0 \Rightarrow \overset{\sin 0}{\cancel{g(0)}} = 0$

$x > 0 \Rightarrow \underbrace{\sin x < 0}$, damit $x \sin x < -1$ möglich

$\hookrightarrow \Leftrightarrow \exists \{x_n\}$ mit $(2k-1)\pi < x_{2k-1} < x_{2k} < 2\pi k$

$\Rightarrow D(Z) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} (x_{2k-1}, x_{2k})$

$D(N) = D\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)$

$x \notin D(f) \Leftrightarrow N(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\Rightarrow D(f) = D\left(\frac{Z}{N}\right) = D(Z) \cap D(N) = \mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} (x_{2k-1}, x_{2k}) \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$

<u>Beh. 3:</u> Sei $f^*(x)$ stetige Fortsetzung von $f$ ~~auf M~~ maximal gewählt und $D(f^*) =: M$, dann ist $M = D(f) \cup \{0\}$ mit $f^*(x) = f(x)\ \forall x \in D(f)$ und $f^*(x) = 4$ für $x = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 + x\sin x - \cos^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x} + \cos x}}_{=:F}$$

$$\overset{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{=} \frac{x\sin x + \sin^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}} \cdot F = \frac{\sin x\,(x + \sin x)}{\sin^2\frac{x}{2}} \cdot F$$

$$\overset{\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{=} \frac{2\cancel{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2} \cdot (x + \sin x)}{\sin^{\cancel{2}}\frac{x}{2}} \cdot F \overset{(*)}{=} \frac{\cancel{x + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x\sin x} + \cos x}$$

$\cancel{f^* \text{ stetig an } x=0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = f^*(0)}$

$\cancel{\Rightarrow f^*(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = (0+2)\cdot \frac{2}{1+1} = 2}$

$f^*$ stetig an $x = y_k := 2k\pi$

$$\lim_{x\to 2k\pi} f(x) = \left(\frac{2k\pi}{\sin(k\pi)} + 2\cos(k\pi)\right)\cdot \frac{2\cos(k\pi)}{\sqrt{1+2k\pi\cdot\sin(2k\pi)}+\cos(2k\pi)}$$

$$= \left(\frac{2k\pi}{0} \pm 2\right)\cdot \frac{\pm 2}{\sqrt{1}+1} = \pm\frac{2k\pi}{0} + 2 = \pm\infty$$

$\Rightarrow \nexists$ stetige Fortsetzung an $y_k$, also $f^*$ auf $D(f^*) = D(f)\cup\{0\}$ maximal.

$$(*)\quad \frac{2\cos\frac{x}{2}(x+\sin x)}{\sin\frac{x}{2}} \cdot F = \frac{4\cos^2\frac{x}{2}(x+\sin x)}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}\cdot F$$

$$= \frac{x+\sin x}{\sin x}\cdot \frac{4\cos^2\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x} = \left(\frac{x}{\sin x}+1\right)\cdot \frac{4\cos^2\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}$$

$$f^*(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = (1+1)\cdot\frac{4}{1+1} = 4$$

310, $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$

$D(f_n) = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{n}\}$, da $1+nx \neq 0 \Leftrightarrow nx \neq -1 \Leftrightarrow x\neq -\frac{1}{n}$

Beh. 1: Konvergenzbereich $K = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$

1. Fall: $x=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+0} = 1$

also: $f(0) = 1$

2. Fall: $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}+x} = 0$$

also: $f(x) = 0$

Beh. 2: Sei $x>0$. $\Rightarrow \{f_n\}$ auf $I := [\frac{x}{2},\infty)$ gleichm. konvergent.

$$|f_n(y) - f(y)| = f_n(y) = \frac{1}{1+ny} < \frac{1}{ny} < \frac{1}{n\frac{x}{2}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{x} \qquad \forall y\in I$$

$$\Rightarrow 0 \le \sup_{y\in I}|f_n(y)-f(y)| < \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{x}$$

also $\lim_{n\to\infty}\sup_I |f_n - f| = 0$ lt. Einschließungskrit.

Beh. 3: Sei $x<-1$. $\Rightarrow \{f_n\}$ auf $I := (-\infty,\frac{x}{2}]$ gleichm. konvergent.

wie oben, nur mit oberer Schranke $\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{|x|}$

Beh. 4: Sei $x \in \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow \{f_n\}$ auf $I := [a, b]$ mit

$$a := \frac{-\frac{1}{n} + x}{2}, \quad b := \frac{x - \frac{1}{n+1}}{2}$$ gleichm. konvergent.

lt. Konstr.: $-\frac{1}{n} < a < x < b < -\frac{1}{n+1}$

betrachte $\forall y \in [a, b]$ die Nenner von $f_k(y)$: für $k > n+1$

$$1 - \frac{k}{n} < 1 + ka \leq 1 + ky \leq 1 + kb < 1 - \frac{k}{n+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+ka} \geq \frac{1}{1+ky} \geq \frac{1}{1+kb}$$

$$\Leftrightarrow f_k(a) \geq f_k(y) \geq f_k(b)$$

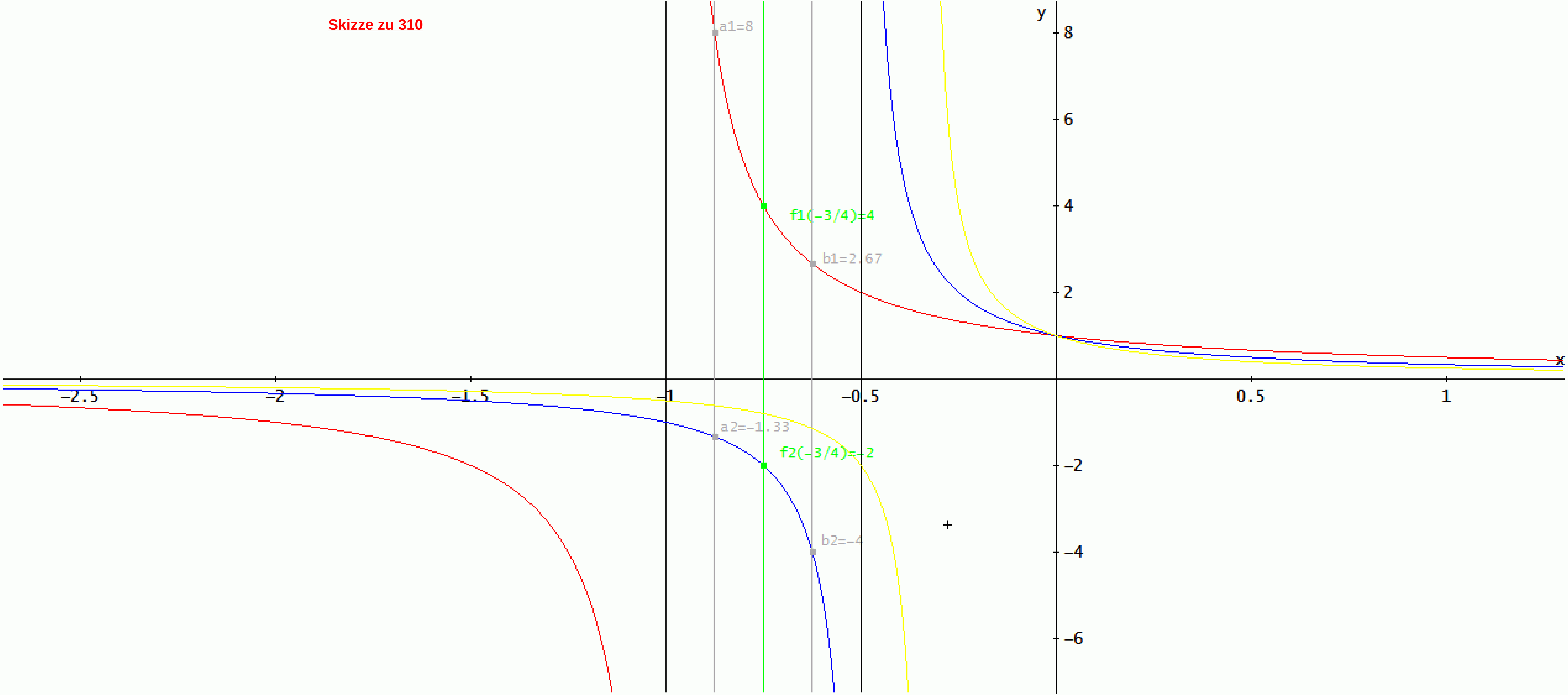
$$\overset{k>n+1}{\Rightarrow} |f_k(a)| \leq |f_k(y)| \leq |f_k(b)|$$

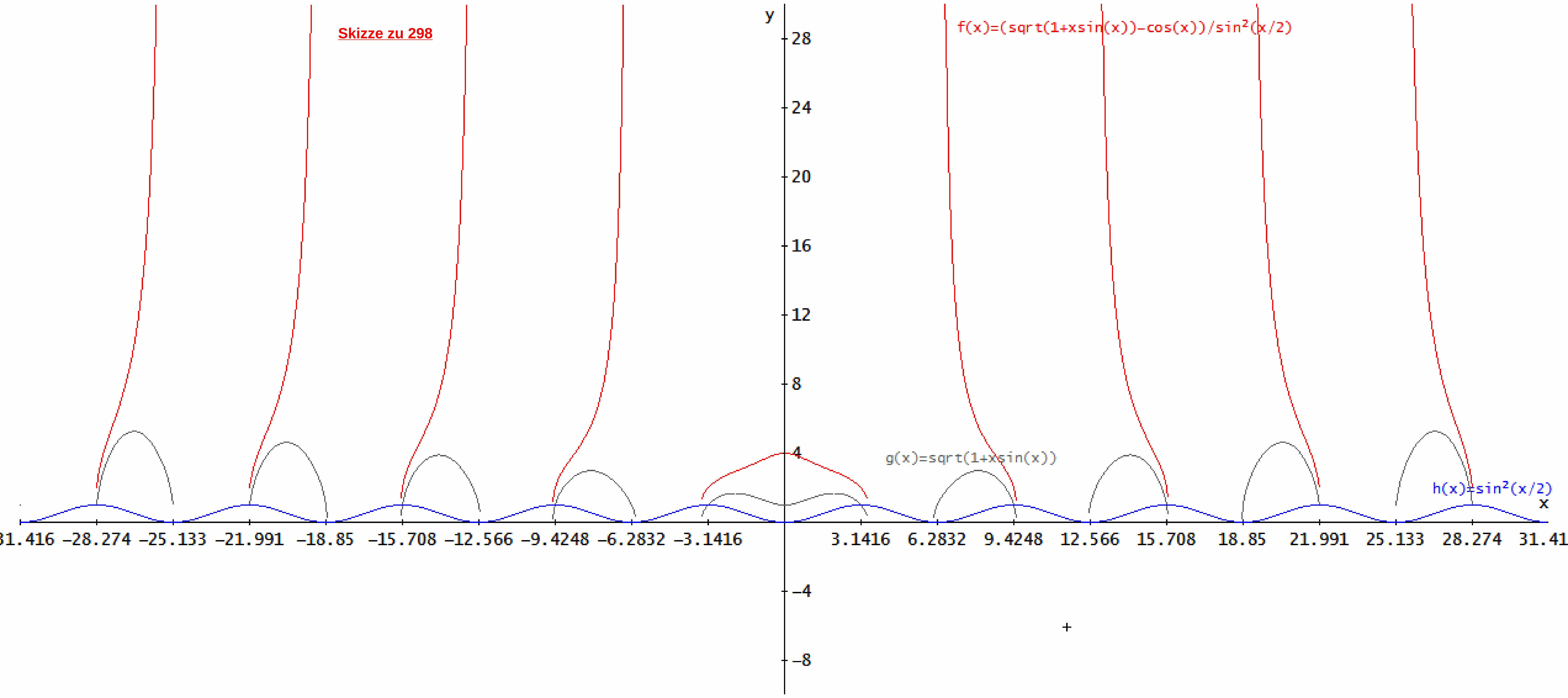
$$\Rightarrow |f_k(a)| \leq \sup_{y \in I} |f_k(y)| \leq |f_k(b)|$$

also $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{I} |f_k - f| = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{y \in I} |f_k(y)| = 0$ lt. Einschl.-Krit.

Aus Beh. 2-4 folgt: $\forall x \in K$ gibt es einen Intervall $I$ um $x$ mit $\{f_n\}$ auf $I$ gleichm. konvergent gegen $f$.

Skizze zu 310





Skizze zu 298
f(x)=(sqrt(1+xsin(x))-cos(x))/sin²(x/2)
g(x)=sqrt(1+xsin(x))
h(x)=sin²(x/2)
y
x
28
24
20
16
12
8
4
-4
-8
-28.274 -25.133 -21.991 -18.85 -15.708 -12.566 -9.4248 -6.2832 -3.1416
3.1416 6.2832 9.4248 12.566 15.708 18.85 21.991 25.133 28.274