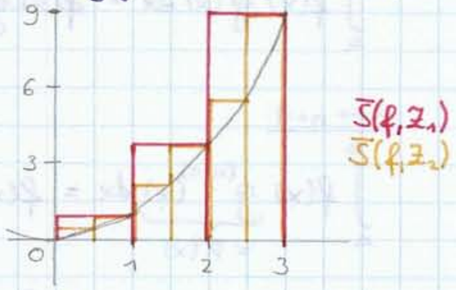
16.3.09

Analysis UE

II) 1, 5, 6, 7, 10, 14, 16

1) $\int_0^3 x^2\,dx = \lim_{k\to\infty} \overline{S}(f, \mathcal{Z}_k)$ wobei $\mathcal{Z}_k$ hat Teilungspunkte $\left\{\frac{n}{k} \,\middle|\, n=1,\dots,3k-1\right\}$



konkret: $\mathcal{Z}_1$-TP: $\{1,2\}$
$\mathcal{Z}_2$-TP: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots, \frac{5}{2}\}$
$\vdots$

$\overline{S}(f,\mathcal{Z}_1) = 1\cdot 1^2 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 3^2$

$\overline{S}(f,\mathcal{Z}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$\Rightarrow$ allgemein: $\overline{S}(f,\mathcal{Z}_k) = \frac{1}{k}\cdot\sum_{n=1}^{3k}\left(\frac{n}{k}\right)^2$

$$= \frac{1}{k^3}\cdot\sum_{n=1}^{3k} n^2$$

ANA 1 Bsp. 52

$$= \frac{1}{k^3}\cdot\frac{2(3k)^3+3(3k)^2+3k}{6} = \frac{\cancel{3k}(18k^2+9k+1)}{\underset{2}{\cancel{6}}\,k^{\cancel{3}\,2}} = \frac{18+\frac{9}{k}+\frac{1}{k^2}}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\overline{S}(f,\mathcal{Z}_k) = \frac{18}{2} = 9$

10) <u>1. Fall: $k\neq n$</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\cdot\sin nx\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx\,dx$$

$$= \cancel{2}\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{\cancel{2}}\left(\cos(kx-nx)-\cos(kx+nx)\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi}\cos(x(k-n))\,dx - \int_0^{\pi}\cos(x(k+n))\,dx$$

$$= \frac{\sin(x(k-n))}{k-n}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(x(k+n))}{k+n}\Big|_0^{\pi} = 0$$

<u>2. Fall: $k=n\neq 0$</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin kx}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\sin kx}_{g(x)}\,dx = -\frac{\cos kx}{k}\cdot\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos kx}{\cancel{k}}\cdot\cos kx\cdot\cancel{k}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(1-\sin^2 kx)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}1 - \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx = \cancel{\pi}+\pi$$

<u>3. Fall: $k=n=0$</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(0) = 0$$

14) $$\int_a^b f(x)\, g^{(n)}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)}(x)\, g^{(n-k-1)}(x) \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\, g(x)\, dx$$

<u>Beweis mittels Induktion:</u>

<u>$n=1$</u>

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx \quad \left(\hat{=} \text{ Formel für part. Integration}\right)$$

<u>$n \mapsto n+1$</u>

$$\int_a^b f(x) \underbrace{g^{(n+1)}(x)}_{=:h'(x)} dx = f(x)\, h(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, h(x)\, dx$$

$$= f(x)\, g^{(n)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{f'(x)}_{=:\ell(x)} g^{(n)}(x)\, dx$$

$$= \text{—''—} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \ell^{(k)}(x) g^{(n-k-1)}(x) \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b \ell^{(n)}(x) g(x)\, dx \right)$$

$$= \text{—''—} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k-1)}(x) \Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)\, g(x)\, dx$$

$$= f(x)\, g^{(n)}(x)\Big|_a^b + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) \Big|_a^b + \text{——''——}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) \Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)\, g(x)\, dx$$

16) $$\int \cos^k x\, dx = \int \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos^{k-1} x}_{g(x)}\, dx$$

$$= \underbrace{\sin x \cos^{k-1} x + C}_{=:a_k} - \int \sin x \cdot (k-1) \cos^{k-2} x \cdot (-\sin x)$$

$$= a_k + (k-1) \int \sin^2 x \cdot \cos^{k-2} x$$

$$= a_k + (k-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{k-2} x$$

$$= a_k + (k-1) \int \cos^{k-2} x - (k-1) \int \cos^k x$$

$\Rightarrow I_k = a_k + (k-1)\, I_{k-2} - (k-1)\, I_k$

$\Leftrightarrow k \cdot I_k = a_k + (k-1)\, I_{k-2}$

$\Leftrightarrow I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2} + \frac{1}{k} \cdot a_k$

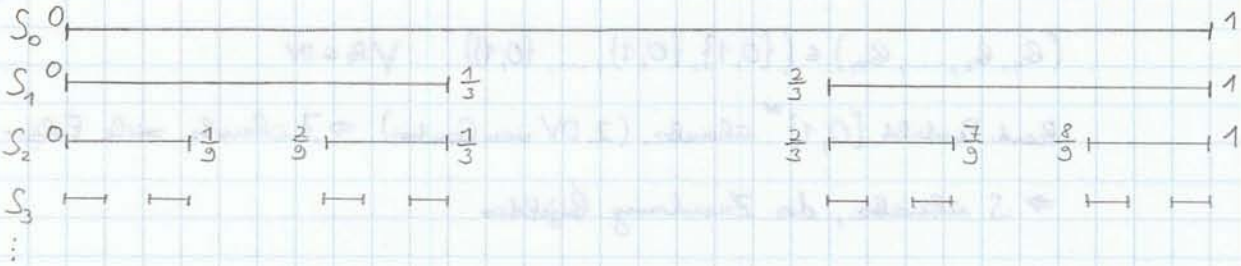
$\Rightarrow$ Rekursionsformel:

$$\int \cos^k x\, dx = \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2} x\, dx + \frac{1}{k} \cdot \sin x \cos^{k-1} x + c$$

mit $\int \cos^0 x\, dx = x$

$\int \cos^1 x\, dx = \sin x$

5) Schema:



$\Rightarrow S_n$ besteht aus 2^n Intervallen I_j der Länge $\ell(I_j) = \frac{1}{3^n}$

$\Rightarrow$ Gesamtlänge aller Intervalle von S_n:

$$\ell(S_n) := \sum_{j=1}^{2^n} \ell(I_j) = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

<u>vollst. Induktion:</u>

$n = 0$: $\ell(S_0) = 1$

$$n \mapsto n+1: \ \ell(S_{n+1}) = \ell(S_n \setminus \{\text{herausgeh. Drittel}\}) = \sum_{j=1}^{2^n} \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) \overset{\ell(I_j)}{\cancel{\ell(I_j)}} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{2^n} \ell(I_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$S = \mathcal{L}\text{-NM} \Leftrightarrow \ell(S_n) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\ell(S_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \overset{n}{\cancel{2}} \ln 2 - n \ln 3 < \ln \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2 - \ln 3} = \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 3 - \ln 2}$

6) Wir führen zum obigen Schema eine Art rekursive „Adressierung" der Intervalle ein, wobei wir bei S_0 starten und den Index um $b_j \in \{0,1\}$ erweitern, je nachdem, ob wir in S_j den linken oder den rechten Teilintervall weiterverfolgen.
(Da $b_0 = 0$ gelten muss, starten wir die Indizierung erst bei b_1.)

zB: $S_{10} \mathrel{\hat{=}}$ rechter Int. in S_1, linker Int. in S_2 also $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$

$\Rightarrow$ allgemein: $S_{b_1 \dots b_k} := \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{2 b_j}{3^j}, \sum_{j=1} \frac{2 b_j}{3^j} + \frac{1}{3^k}\right]$

Diese Def. ist eindeutig, da jede Folge von b_j einen solchen Intervall bestimmt, umgekehrt kann ein Intervall nur einer einzigen Folge von b_j zugeordnet werden.

<u>Bew. d. vollst. Ind.:</u>

$k = 1$: $S_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ $\quad S_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

$$k \mapsto k+1: \ S_{b_1 \dots b_k b_{k+1}} = \Bigg[\sum_{j=1}^{k} \frac{2 b_j}{3^j} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{neue Intervalllänge}}}{\overset{\text{wieder l.o.r.}}{\frac{2 b_{k+1}}{3^{k+1}}}} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2 b_j}{3^j}, \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2 b_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}\Bigg]$$

<u>Hinweis:</u> $\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{3^j}$ mit $a_j \in \{0,2\} \in S \ \forall N \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \frac{2 b_j}{3^j}$ mit $b_j \in \{0,1\} \in S \ \forall N \in \mathbb{N}$

Wahre Aussage, da die oben definierten Randpunkte bei jeder Teilung erhalten bleiben.
$\Rightarrow$ jeder solche Punkt ist GW einer b_j-Folge

Beh.: S ist überabzählbar.

$$(b_1, b_2, \dots, b_k) \in (\{0,1\}, \{0,1\}, \dots, \{0,1\}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

kart. Produkt $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabz. (2. DV von Cantor) $\Rightarrow \exists$ überabz. viele Folgen $S_{b_1 b_2 \dots}$

$\Rightarrow S$ überabz., da Zuordnung bijektiv

Alternativ-Beweis:

ZZ: $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j}{3^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j'}{3^j} \Rightarrow b_j = b_j' \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

setze $j_0 := \min\{j \mid b_j \neq b_j'\} \Rightarrow b_{j_0} = 0,\ b_{j_0}' = 1$ o.B.d.A.

und $x := \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{2b_j}{3^j}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j}{3^j} \leq x + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = x + 2\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{3^j}$$

$$= x + 2\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j - \sum_{j=0}^{j=j_0}\left(\frac{1}{3}\right)^j\right)$$

$$= x + 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{j_0+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= x + \cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}} - \frac{3}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{3^{j_0+\cancel{1}}}\right)$$

$$= x + \frac{1}{3^{j_0}}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j'}{3^j} \geq x + \frac{2}{3^{j_0}}$$

d.h. versch. Folgen $\Rightarrow$ versch. Intervalle, also Zuordnung inj. und S überabz.

7) $f \le g$ auf $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

also ZZ: mit Zusatz-VS gilt „<"

$f \le g \Leftrightarrow f-g \le 0$ auf $[a,b]$

wissen: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x) < 0 \Leftrightarrow (f-g)(x) < 0$ für ein $x \in [a,b]$,
$f-g$ dort stetig

$\Rightarrow (f-g)(y) < 0 \quad \forall y \in (x-c, x+c) \supset [x-\rho, x+\rho]$

$\rho := c-\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$

f, g auf $[a,b]$ intbar (lt. Aufgabenstellung)

$\Rightarrow f, g$ auf $[x-\rho, x+\rho]$ intbar

$\Rightarrow f+(-g) = f-g$ auf $[x-\rho, x+\rho]$ intbar

also $\int_{x-\rho}^{x+\rho} (f-g)(y)\,dy < 0 \quad \Leftrightarrow \int_{x-\rho}^{x+\rho} f(y)\,dy < \int_{x-\rho}^{x+\rho} g(y)\,dy$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$