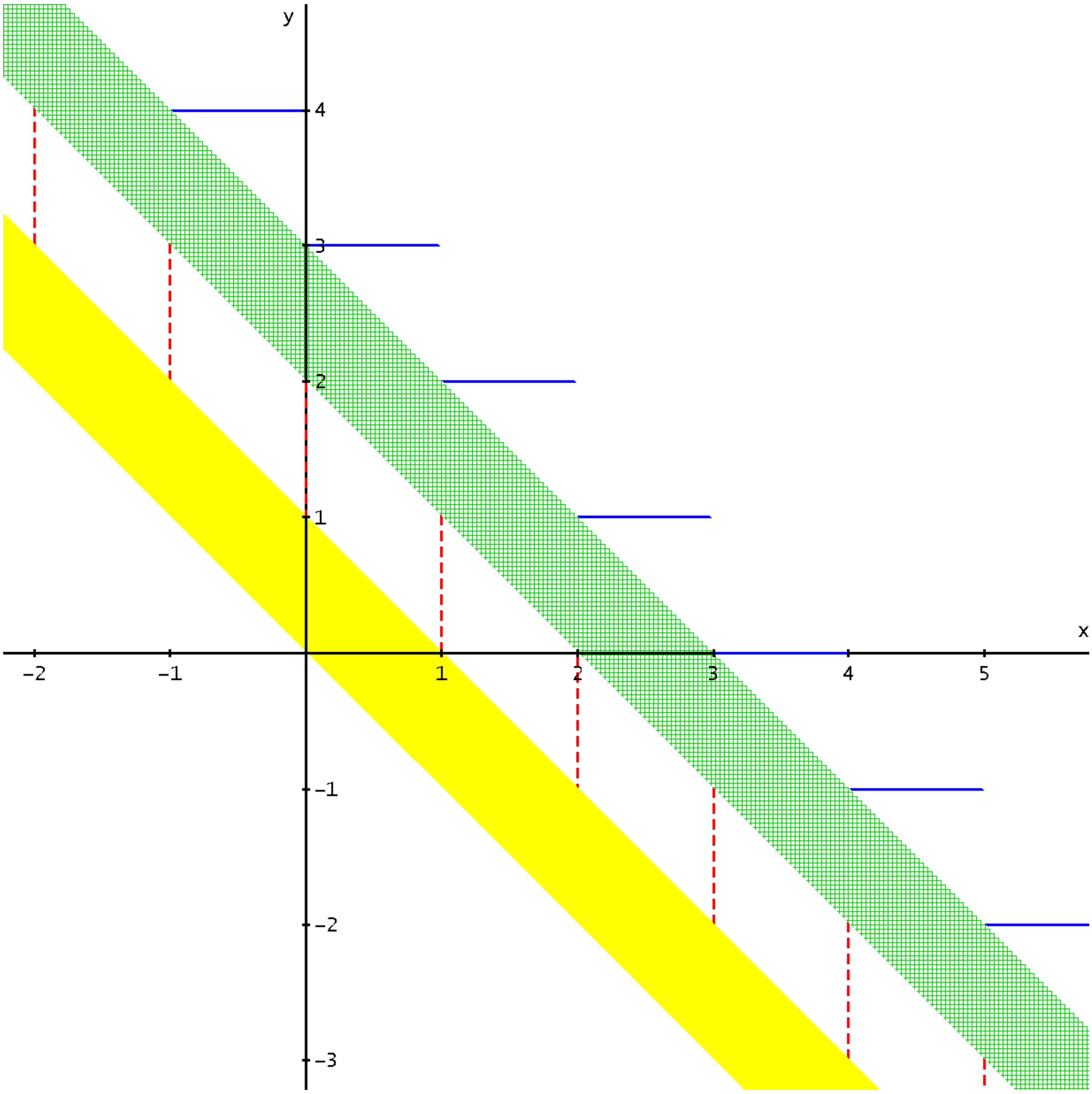
27.04.2009

Analysis 2 UE

VI) 121, 129, 133, 134, 140, 143

121) Sei $M_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, j-1 \leq x+y < j\}\,(j \in \mathbb{N})\}$.
Bestimmen Sie das Innere, den Rand und die abgeschlossene Hülle der Menge T (bezüglich der euklidischen Metrik).

$$T = M_1 \cup (M_2 \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Q})) \cup (M_3 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) \cup (M_4 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}))$$



$$T^\circ = M_1^\circ = M_1 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rd}\,T = &\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0 \,\vee\, x+y=1\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}) \,|\, 1 \leq x+y < 2\} \cup \\ &M_3 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=3\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \,|\, 3 \leq x+y \leq 4\}\end{aligned}$$

$$\bar{T} = T \cup \mathrm{Rd}\,T$$

129) Zeigen Sie, dass die Funktion d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 + |x-y|, & \text{falls genau eine der Zahlen } x, y \text{ in } \mathbb{R}^+ \text{ liegt} \\ |x-y| & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

0. $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   - $1 + \underbrace{|x-y|}_{\geq 0} \geq 1 \geq 0$
   - $|x-y| \geq 0$
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   „$\Leftarrow$“: $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = |x-y| = |x-x| = 0$
   „$\Rightarrow$“: $d(x,y) = 0$ nur möglich, wenn $d(x,y) = |x-y|$ und $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   - $x \in \mathbb{R}^+, y \notin \mathbb{R}^+$ o.B.d.A
     $d(x,y) = 1 + |x-y| = 1 + |y-x| = d(y,x)$
   - sonst:
     $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$
   1. Fall: $x \in \mathbb{R}^+, y \notin \mathbb{R}^+$ o.B.d.A
      a) $y = \mathbb{R}^+$:
         $d(x,y) + d(y,z) = |x-y| + 1 + |y-z| \geq |x-z| + 1 = d(x,z)$
      b) $y \neq \mathbb{R}^+$: analog
   2. Fall: sonst
      a) $y = \mathbb{R}^+$:
         $d(x,y) + d(y,z) = 1 + |x-y| + 1 + |y-z| \geq |x-y| + |y-z| \geq |x-z| = d(x,z)$
      b) $y \neq \mathbb{R}^+$:
         $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ gilt nach der Dreiecksungleichung

---

Bestimmen Sie alle Kugeln $K_r(x)\,(x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+)$.

Wir definieren zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} K_r^+(x) := \{y \in \mathbb{R}^+ \,|\, d(x,y) < r\} \\ K_r^-(x) := \{y \notin \mathbb{R}^+ \,|\, d(x,y) < r\} \end{array}\right\} \Rightarrow K_r(x) = K_r^+(x) \cup K_r^-(x)$$

Sei $x \in \mathbb{R}^+$. $\Rightarrow K_r(x) = K_r^+(x) \cup K_r^-(x)$

$$\begin{aligned} &= \{y \in \mathbb{R}^+ \,|\, d(x,y) < r\} \cup \{y \notin \mathbb{R}^+ \,|\, d(x,y) < r\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^+ \,|\, |x-y| < r\} \cup \{y \in \mathbb{R}^- \cup \{0\} \,|\, |x-y| < r-1\} \end{aligned}$$

$K_r(x)$ liegt also vollständig in $\mathbb{R}^+$ für $r \leq x+1$ und besteht sonst aus einer positiven und einer nichtpositiven Teilkugel.

Beispiele:
$K_2(1) = (0,3)$, da $|x-y| < r-1 \Leftrightarrow 1-y < 1 \Leftrightarrow y > 0 = \emptyset \quad \forall\, y \notin \mathbb{R}^+$
$K_3(1) = (-1,0] \cup (0,4) = (-1,4)$

Analog für $K_r(x)$ mit $x \notin \mathbb{R}^+$.

133) Zeigen Sie, dass eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ genau dann eine Metrik ist, wenn gilt:
1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ und
2) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Beweis:

a) d Metrik $\Rightarrow \begin{cases} \text{1) gilt laut Def.} \\ \text{2) } d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z) \text{ aufgrund der Symmetrie} \end{cases}$

b) Zu zeigen ist nur noch die Symmetrie der Funktion. Wähle $z = x$. $\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) = \underbrace{d(x,x)}_{0} + d(y,x)$. Analog kommt man mit $z = y$ auf $d(y,x) \leq d(x,y)$.

Also gilt $d(x,y) = d(y,x)$.

134) Zeigen Sie, dass $d_b(x,y) = \min(|x-y|, b-|x-y|)$ eine Metrik auf $[0,b)$ ist.

Beweis:

0. $d_b(x,y) \geq 0$
$0 \leq |x-y| < b \Leftrightarrow b - |x-y| > 0$
$\Rightarrow \min(|x-y|, b-|x-y|) \geq 0$

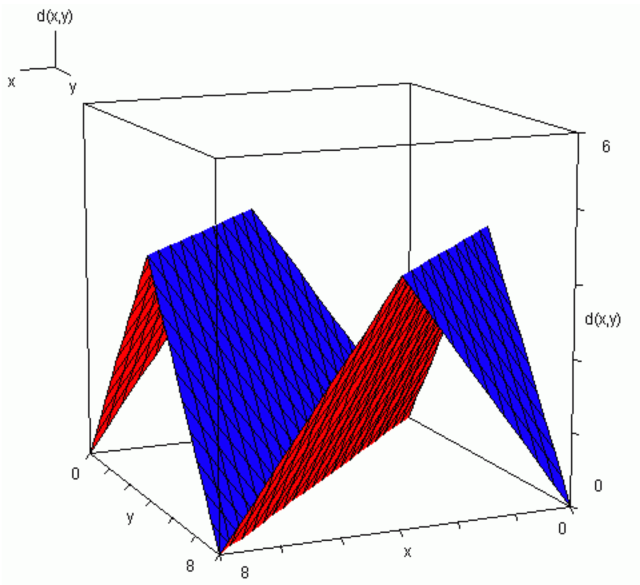
1. $d_b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$\min(|x-y|, b-|x-y|) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \vee \underbrace{b-|x-y|}_{>0\,\forall} = 0 \Leftrightarrow x = y$

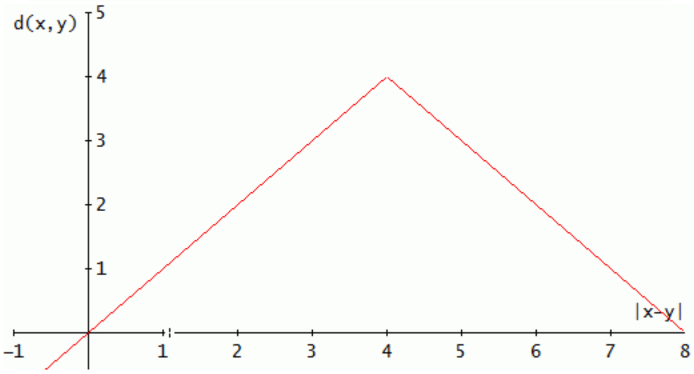
2. $d_b(x,y) = d_b(y,x)$
$d_b(x,y) = \min(|x-y|, b-|x-y|) = \min(|y-x|, b-|y-x|) = d_b(y,x)$

3. $d_b(x,y) \leq d_b(x,z) + d_b(z,y)$ $d_b(x,z) + d_b(z,y) = \min(|x-z|, b-|x-z|) + \min(|z-y|, b-|z-y|) =$
$\min(\underbrace{|x-z| + |z-y|}_{\geq |x-y|}, \underbrace{|x-z| + b - |z-y|}_{\geq b-|x-y|}, \underbrace{b - |x-z| + |z-y|}_{\geq b-|x-y|}, \underbrace{b-|x-z| + b - |z-y|)}_{\geq b-|x-y|} \geq$
$\min(|x-y|, b-|x-y|) = d_b(x,y)$

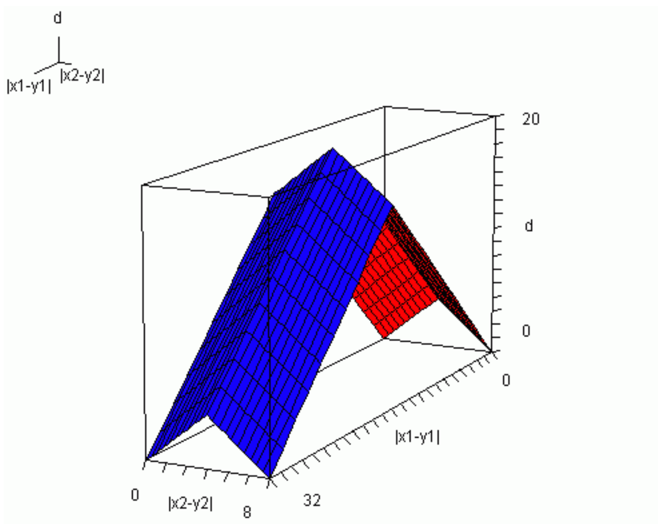
$\forall\, x,y,z \in [0,b), b \in \mathbb{R}^+$

Interpretieren Sie diese Metrik geometrisch („Zusammenheften" von 0 und b).





Wie kann man die aus d_{4b} und d_b gewonnene Summenmetrik auf $[0, 4b) \times [0, b)$ geometrisch interpretieren?



140) Erweiterung der Standardnormen von $\mathbb{R}^n$ auf Vektoren mit abzählbar vielen Komponenten: Zeigen Sie, dass die Menge A_0, die alle beschränkten reellen Zahlenfolgen $\{x_n\}$ enthält, bezüglich gliedweiser Addition und Multiplikation mit Konstanten einen Vektorraum bildet.

Wir zeigen, dass $\boldsymbol{A_0}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, also abgeschlossen ist:

- $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} \in \boldsymbol{A_0}$, da die Beschränktheit erhalten bleibt.
- $c \cdot \{x_n\} = \{c \cdot x_n\} \in \boldsymbol{A_0}$, da bei Multiplikation mit einem $c \in \mathbb{R}$ die Beschränktheit von $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ nicht verloren geht.

Zeigen Sie ferner, dass $||\{x_n\}|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ eine Norm auf diesem Vektorraum ist.

Beweis:

0. $||\{x_n\}|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \geq 0$
1. $||\{x_n\}|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$
2. $||c \cdot \{x_n\}|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |c \cdot x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|c| \cdot |x_n|\} = |c| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |c| \cdot ||\{x_n\}||$
3. $||\{x_n\}+\{y_n\}|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n+y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|+|y_n|\} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|+\sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = ||\{x_n\}||+||\{y_n\}||$

$\forall\, \{x_n\} \in \boldsymbol{A_0}, c \in \mathbb{R}$

143) Zeigen Sie, dass die Normen aus Bsp. 140 und 141 auf dem kleineren der beiden Vektorräume $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{A_1}$ (welcher ist das?) nicht zueinander äquivalent sind.

Beh. 1: Es gilt $\boldsymbol{A_0} \subseteq \boldsymbol{A_1}$.

Beweis: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abs. konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ konvergent $\Rightarrow \{x_n\}$ bilden Nullfolge $\Rightarrow \{x_n\}$ beschränkt. ABER: $\{x_n\}$ beschränkt $\not\Rightarrow \{x_n\}$ konvergiert.

Also $\boldsymbol{A_0} \subseteq \boldsymbol{A_1}$.

Beh. 2: Die beiden Normen sind auf $\boldsymbol{A_1}$ nicht äquivalent.

Beweis: Wir nehmen an, die beiden Normen wären äquivalent. Wir wissen: $||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{A_0}}$, $||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{A_1}}$ sind auf $\boldsymbol{A_1}$ äquivalent $\Leftrightarrow \exists\, a < b \in \mathbb{R}^+$ *unabhängig* von $\boldsymbol{x}$ mit

$$a \cdot ||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{A_0}} \leq ||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{A_1}} \leq b \cdot ||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{A_0}} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_1}. \tag{1}$$

Es reicht also, ein Element aus $\boldsymbol{A_1}$ zu finden, für das solche Konstanten a, b nicht existieren. Dazu betrachten wir zunächst die Folge $y_n = \frac{1}{\lambda^n}$. Man erkennt leicht, dass y_n für $|\lambda| < 1$ ein Element von $\boldsymbol{A_1}$ (und nach Beh. 1 auch von $\boldsymbol{A_0}$) ist. Wir berechnen daher die Normen

$$||\boldsymbol{y}||_{\boldsymbol{A_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{|\lambda|}} - 1 = \frac{1}{|\lambda|-1} \quad \forall\, |\lambda| > 1$$

sowie

$$||\boldsymbol{y}||_{\boldsymbol{A_0}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{\lambda^n}\right| = \frac{1}{|\lambda|} \quad \forall\, |\lambda| \geq 1$$

Laut (1) müssen daher fixe $a < b \in \mathbb{R}^+$ folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{a}{|\lambda|} \leq \frac{1}{|\lambda|-1} \leq \frac{b}{|\lambda|} \quad \forall\, |\lambda| > 1. \tag{2}$$

Nun ist ersichtlich, dass der mittlere Ausdruck für $|\lambda| \to 1^+$ unbeschränkt wird und es daher kein festes $b \in \mathbb{R}$ geben kann.

Genauer: Sei $b > 1$ (gilt o.B.d.A) eine solche Konstante für ein festes, aber beliebiges λ. Dann folgt

$$\frac{1}{|\lambda| - 1} \leq \frac{b}{|\lambda|} \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda| - 1} \leq b - 1 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 1 + \frac{1}{b-1} > 1.$$

Es genügt, ein $\tilde{\lambda} < |\lambda|$ zu finden, sodass $1 < \tilde{\lambda} < 1 + \frac{1}{b-1}$ gilt, z.B.: $\tilde{\lambda} := 1 + \frac{1}{b}$.
Somit erfüllt b nicht die Ungleichung in (2) bezüglich $\tilde{\lambda}$. Durch die beliebige Wahl von λ kann für Folgen dieser Bauart kein solches b existieren. Ein Widerspruch zu unserer Annahme.