04.05.2009

Analysis 2 UE

VII) 149, 150, 154, 158, 161, 166

149) Zeigen Sie, dass die Integralnorm $\int_a^b |f|$ und die Supremumsnorm $\sup_{[a,b]} |f|$ auf dem Vektorraum $C[a,b]$ nicht äquivalent sind.

Beweis: Es genügt die Angabe eines Gegenbeispiels. Wir betrachten also in der Folge $C[0,1]$ und nehmen an, die beiden Normen wären äquivalent, d.h. es existieren $a < b \in \mathbb{R}^+$ derart, dass

$$a \cdot \sup_{[0,1]} |f| \leq \int_0^1 |f| \leq b \cdot \sup_{[0,1]} |f| \quad \forall\, f \in C[0,1].$$

Wir wählen die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n \in C[0,1] \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und berechnen

$$\sup_{[0,1]} |x^n| = \sup_{[0,1]} x^n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

sowie

$$\int_0^1 |x^n| \,\mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Bildet man hier nun den Grenzübergang, ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x^n| = 0$, während das Supremum unverändert bleibt.

Es kann also kein solches $a > 0$ unabhängig von x existieren, die Normen sind demnach auf $C[a,b]$ nicht äquivalent.

150) Zeigen Sie, dass der Vektorraum A_0 aus Bsp. 140 mit der Supremumsnorm $||\{x_n\}||$ vollständig ist.

Beweis: A_0 ist vollständig, wenn dort jede Cauchy-Folge konvergiert. Sei $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine CF, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_n|| < \varepsilon \;\forall\, k,n \geq N(\varepsilon)$. Es gilt

$$||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_n|| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_{kj} - x_{nj}| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x_{kj} - x_{nj}| < \varepsilon \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, k,n \geq N(\varepsilon)$$

Alle Komponentenfolgen $\{x_{nj}\}_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen also die Cauchy-Bedingung in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergieren sie gegen ein $x_j \in \mathbb{R}$. Also

$$\Rightarrow |x_{kj} - x_j| < \varepsilon \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_{kj} - x_j| < \varepsilon \quad \forall\, k \geq K(\varepsilon)$$

Sei nun $\boldsymbol{x} := \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, dann ist der letzte Ausdruck äquivalent zu $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| < \varepsilon \;\forall\, k \geq K(\varepsilon)$, die Folge ist also konvergent.

154) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass der Vektorraum $C[a,b]$ der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen bezüglich der Integralnorm $\int_a^b |f|$ nicht vollständig ist.

Beh.: $f_n = x^n$ bildet auf $C[0,1]$ eine Cauchy-Folge, die nicht konvergiert.

Beweis: Wir nehmen o.B.d.A $k \geq n$ an und prüfen zunächst die Cauchy-Eigenschaft:

$$||f_n - f_k|| = \int_0^1 |x^n - x^k| \,\mathrm{dx} = \int_0^1 x^n \,\mathrm{dx} - \int_0^1 x^k \,\mathrm{dx} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{k+1} \quad \forall\, k \geq n \geq N(\varepsilon)$$

Durch die Abschätzung $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ kommt man auf $N(\varepsilon) \geq \varepsilon^{-1}$.

Nun bilden wir die Grenzfunktion

$$f := \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 \text{ für } x = 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

f ist an 1 unstetig, also $f \notin C[0,1] \Rightarrow f_n$ konvergiert nicht in $C[0,1]$.

158) Untersuchen Sie im Raum $C[0,1]$ der stetigen Funktionen von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ mit der Integralnorm $\int_0^1 |f|$, ob die folgenden „Punkte“ 0, 1, $\sin 2\pi t$ Häufungspunkte der Teilmenge aller positiven stetigen Funktionen mit $f(0) = f(1) = 0$ sind.

Vorab: $h \in C[0,1]$ ist Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists\, \{f_n\}$ in $C[0,1] \setminus \{h\}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = h$.
Da $||f_n - h|| \to 0 \Leftrightarrow f_n \to h$ müssen wir lediglich passende Funktionenfolgen finden, die obige Kriterien erfüllen und für $n \to \infty$ gegen h konvergieren.

Beh. 1: Jede Funktion $f(x) = h$ mit $h \in \mathbb{R}^+$ ist Häufungspunkt.

Beweis: Wir definieren z.B.

$$f_n(x) = h(1-(2x-1)^{2n} \quad \text{oder} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{0,1\} \\ \text{linear} & x \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1\right) \\ h & x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}\right] \end{cases}$$

Offensichtlich gilt in beiden Fällen $\lim_{n\to\infty} = h$.

Beh. 2: Die Funktion $f(x) = 0$ ist Häufungspunkt.

Beweis: Wir definieren z.B.

$$f_n(x) = \frac{\sin(\pi x)}{n} \quad \text{oder} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{0,1\} \\ \text{linear} & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ \frac{1}{n} & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

In beiden Fällen folgt $\lim_{n\to\infty} = 0$.

Beh. 3: Keine Funktion $f(x) = h$ mit $h \in \mathbb{R}^-$ kann Häufungspunkt sein.

Beweis: Wählt man eine Kugel vom Radius $r \leq |h|$, so liegt keine Funktion der zu untersuchenden Menge darin. $\Rightarrow h$ ist äußerer Punkt.

161) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Koordinatenursprung an dieser Stelle stetig ist, f selbst jedoch dort unstetig.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beh. 1: Jede Annäherung an $(0,0)$ über eine beliebige Gerade liefert als Grenzwert 0.

Beweis: Jede Gerade durch den Koordinatenursprung lässt sich in der Form $y = k \cdot x$ anschreiben. Sei $k \in \mathbb{R}$ fix, dann sind alle Punkte der Gerade bestimmt durch $\{(x,y) \,|\, y = k \cdot x\}$. Es folgt:

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \frac{k^3 x^4}{x^2 + k^6 x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{k^3 x^2}{1 + k^6 x^4} = 0$$

Beh. 2: Die Funktion ist an $(0,0)$ unstetig.

Beweis: Die Annäherung $x = y^3$ liefert

$$\lim_{y \to 0} f(y^3, y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^6}{y^6 + y^6} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow f$ ist an $(0,0)$ unstetig.

166) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit an $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beh.: f ist an $(0,0)$ stetig.

Beweis: Elementares Abschätzen liefert:

$$\frac{xy}{|x| + |y|} \leq \frac{\max^2(|x|, |y|)}{\max(|x|, |y|)} = \max(|x|, |y|) = ||(x,y)||_{\max} \to 0 \text{ für } (x,y) \to (0,0).$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0.$