18.5.09

Analysis UE

IX) 181, 186, 189, 194, 197, 202

181) $x^3 = c \Leftrightarrow 0 = -x^3 + c \Leftrightarrow x = -x^3 + x + c$

$\Rightarrow$ Fixpunktaufgabe: $f(x) = -x^3 + x + c$

$[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ vollständig $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

wir suchen ein $[\alpha, \beta]$ derart, f auf $[\alpha, \beta]$ kontrahierend ist (1.)

und $f(x) \in [\alpha, \beta]\ \forall x \in [\alpha, \beta]$ gilt (2.).

(1.) f kontrahierend $\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ mit $\lambda < 1$

$\Leftrightarrow \sup\limits_{[\alpha,\beta]} |f'| = \sup\limits_{[\alpha,\beta]} |-3x^2 + 1| < 1$

$$\left.\begin{array}{l} -3x^2 + \cancel{1} < \cancel{1} \Leftrightarrow x \neq 0 \\ -3x^2 + 1 > -1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ist für alle } [\alpha,\beta] \subseteq \underbrace{\left(-\tfrac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)}_{=:T_1} \cup \underbrace{\left(0, \tfrac{\sqrt{6}}{3}\right)}_{=:T_2} \text{ kontrahierend.}$$

(2.) betrachte $[\alpha, \beta] \subseteq T_2$:

$f''(x) = -6x \Rightarrow f'$ ist monoton fallend auf T_2

$\Rightarrow f$ ist auf T_2 konkav (Graph oberhalb der lin. Verbindung)

$\Rightarrow \min\limits_{[\alpha,\beta]} f = \min(f(\alpha), f(\beta))$

$f'(x) = -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\left.\begin{array}{l} f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum} \\ f \text{ konkav} \end{array}\right\} \Rightarrow \max_{[\alpha,\beta]} f \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} + c \approx 0{,}385 + c$$

$\Rightarrow$ $f(x) \in [\alpha, \beta]\ \forall x \in [\alpha, \beta]$ falls gilt:

$$\begin{array}{l} f(\alpha) = -\alpha^3 + \alpha + c \geq \alpha \\ f(\beta) = -\beta^3 + \beta + c \geq \alpha \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} + c \leq \beta \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow f(\alpha) = \underbrace{-\alpha^3 + \alpha}_{>0, \text{ da } 0 < \alpha < 1} + c > c \geq \alpha \\ \Rightarrow f(\beta) > c \geq \alpha \text{ (analog)} \end{array}$$

Es genügt also, α und β mit $0 < \alpha \leq c$ und $\frac{2\sqrt{3}}{9} + c \leq \beta < \frac{\sqrt{6}}{3}$ zu wählen.

$\Rightarrow$ Die sukzessive Approximation konvergiert sicher für alle c, die obige Ungleichungen erfüllen, also für $c \in \underbrace{\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}_{\approx 0{,}4316}$ bei Wahl eines beliebigen Startwerts $a \in T_2$

Analog für $[\alpha, \beta] \subseteq T_1$ und $c \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ und bel. Startwert $a \in T_1$.

Untersuchung für $\underline{a = 0}$:

$x_0 = 0$
$x_1 = f(0) = c \in T_2 \vee T_1 \Rightarrow$ Konvergenz.

186) gesucht: Lösung von $f(x) = \frac{x}{\pi} \cos f(x)$ in $C[-1,+1]$ mit $\|\cdot\|_{sup}$

$\Leftrightarrow$ gesucht: Fixpunkt von $h(f) = \frac{x}{\pi} \cos f(x)$.

Beh. 1: h ist auf $C[-1,1]$ kontrahierend.

Bew.: Die Beh. gilt $\Leftrightarrow \sup\limits_{x\in[-1,1]} |h(f(x)) - h(g(x))| \le \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)-g(x)| \cdot \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}(0,1)$ $\forall f,g \in C[-1,1]$

Wissen: $|\cos x - \cos y| \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\cos'(x)| \cdot |x-y| \le |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |\cos f(x) - \cos g(x)| \le |f(x) - g(x)| \quad \forall f,g \in [-1,1]$, x fest

$\Rightarrow |h(f(x)) - h(g(x))| = \left|\frac{x}{\pi} \cos f(x) - \frac{x}{\pi} \cos g(x)\right|$

$\overset{x\in[-1,1]}{\le} \frac{1}{\pi} |\cos f(x) - \cos g(x)| < |f(x) - g(x)| \quad \forall f \ne g \in [-1,1]$, x fest

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[-1,1]} |h(f(x)) - h(g(x))| = |h(f(\tilde{x})) - h(g(\tilde{x}))| < |f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})| \le \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)|$

$\forall f \ne g \in [-1,1]$

also: Es existiert so ein $\lambda < 1$, der Fall $f = g$ wird in trivialer Weise erfüllt.

Beh. 2: $C[-1,1]$ ist vollständig bezüglich der Supremumsnorm.

Sei $\{f_n\}$ Cauchyfolge in $C[-1,1]$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n - f_k| < \varepsilon$ $\forall n,k \ge N(\varepsilon)$

$\{f_n\} \to f \Leftrightarrow f \in C[-1,1]$

Ann.: $\exists f := \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\Rightarrow f_n \to f$ gleichmäßig

$\Rightarrow f \in C[-1,1]$, da glm. Konvergenz die Stetigkeit erhält.

$\Rightarrow C[-1,+1]$ vollständig.

Beh. 3: $h(f) \in C[-1,1] \quad \forall f \in C[-1,1]$

Bew.: Sei $f \in C[-1,1] \Rightarrow h(f) = \frac{x}{\pi} \cos f(x)$ ist stetig auf $[-1,1]$ $\forall x$

Aus Beh. 1-3 folgt die Gültigkeit des Fixpunktsatzes von Banach mit der Approximationsfolge $\{f_n\}: \begin{cases} f_0 = a \\ f_{n+1} = h(f_n) \end{cases}$ die für jede Startfunktion $a \in [-1,1]$ gegen die Lösungsfunktion konvergiert.

Wähle zB $a = 0$ (Nullfkt.):

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= h(f_0) = h(0) = \tfrac{x}{\pi} \\ f_2 &= h(f_1) = \tfrac{x}{\pi}\cos\left(\tfrac{x}{\pi}\right) \\ f_3 &= h(f_2) = \tfrac{x}{\pi}\cos\left(\tfrac{x}{\pi}\cos\left(\tfrac{x}{\pi}\right)\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

189) $A = \{1, \cosh(x)\}$ ist Unteralgebra von $C([x,y],\mathbb{R})$ $\forall x \leq y \in \mathbb{R}$, da abgeschlossen bezüglich Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation.

Auf welchen Intervallen $[a,b]$ bildet A eine <u>punktetrennende Algebra</u>?

d.h. $\exists$ zu $\alpha \neq \beta \in [a,b]$ mind. eine Funktion $\varphi \in A$ mit $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$.

Da $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ für $\varphi = 1$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ muss gelten:

$\cosh\alpha \neq \cosh\beta \quad \forall \alpha, \beta \in [a,b]$

cosh gerade und streng monoton $\Rightarrow$ erfüllt $\underline{\forall [a,b] \subseteq [0,\infty)}$ sowie $\underline{\forall [a,b] \subseteq (-\infty, 0]}$

Aussage des Satzes von <u>Stone und Weierstraß</u>:

Jede Funktion aus $C([a,b],\mathbb{R})$ kann auf ganz $[a,b]$ beliebig gut gleichmäßig durch Funktionen aus A approximiert werden (da A die konstante Funktion 1 enthält und auf o.a. Intervallen punktetrennend ist).

194) ges.: $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass $\int_0^1 (\ln(x+1) - ax^2 - bx - c)^2\, dx$ minimal wird.

Wir wenden zunächst auf $1, x, x^2$ das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, um zu einem OGS zu gelangen:

$u = \{1, x, x^2\}$, $\langle g, f\rangle = \int_0^1 (g \cdot f)(x)\, dx$

$\Rightarrow v_1 = u_1 = \underline{1}$

$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 = x - \frac{\int_0^1 x\, dx}{\int_0^1 1\, dx} = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} = \underline{x - \frac{1}{2}}$

$v_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2}\rangle}{\langle x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}\rangle}(x - \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{3} - 1 \cdot (x - \frac{1}{2}) = \underline{x^2 - x + \frac{1}{6}}$

da $\langle x^2, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{2}x^2)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\, dx = \left| \begin{matrix} y = x - \frac{1}{2} \\ dy = dx \end{matrix} \right| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^2\, dy = \frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$.

$\Rightarrow$ OGS $v = \{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$

S. 115: Liegt in $Q(0,1)$ ein OGS vor, ist das mittlere Fehlerquadrat bei Approximation von $\ln(x+1)$ durch Lin.-Komb. von v am kleinsten, wenn die Koeff. den Fourier-Koeff. entsprechen:

$c_j = \frac{1}{\|v_j\|^2} \int_0^1 \ln(x+1) \cdot v_1(x)\, dx$

$c_1 = \frac{1}{\langle 1, 1\rangle} \int_0^1 \ln(x+1)\, dx = \left| \begin{matrix} \ln(x+1) = y \\ \frac{1}{x+1} dx = dy \end{matrix} \right| = \int_0^{\ln 2} \underset{g}{y}\, \underset{f'}{e^y}\, dy = y e^y \Big|_0^{\ln 2} - e^y \Big|_0^{\ln 2} = \underline{2\ln 2 - 1}$

$\cancel{c_2 = \int_0^1 \ln(x+1)\, x\, dx = |\text{w.o.}| = \int_0^{\ln 2} y e^{2y} - \int_0^{\ln 2} y e^y = \frac{1}{2} y e^{2y}\Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{4} e^{2y}\Big|_0^{\ln 2} - 2\ln 2 + 1}$

$\cancel{= 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} - 2\ln 2 + 1 = \frac{1}{4}}$

$\cancel{\Rightarrow c_2 = \frac{1}{\langle x, x\rangle} c_2 = \frac{1}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle} \cdot \frac{1}{4} =}$

c_2: $\int_0^1 \ln(x+1)(x - \frac{1}{2}) = |\text{w.o.}| = \int_0^{\ln 2} y e^{2y} - \frac{3}{2}\int_0^{\ln 2} y e^y = 2\ln 2 - \frac{3}{4} - 3\ln 2 + \frac{3}{2} = -\ln 2 + \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2} y e^{2y}\Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{4} e^{2y}\Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{\|x - \frac{1}{2}\|^2}(-\ln 2 + \frac{3}{4}) = \underline{-12\ln 2 + 9}$

c_3: $\int_0^1 \ln(x+1)(x^2-x+\frac{1}{6}) = \left| \text{w.o.} \right| = \int_0^{\ln 2} y\left((e^y-1)^2-(e^y-1)+\frac{1}{6}\right)e^y\,dy$

$= \underbrace{\int_0^{\ln 2} y e^{3y}} - 3\int_0^{\ln 2} y e^{2y} + \frac{13}{6}\int_0^{\ln 2} y e^y = \ln 2 - \frac{25}{36}$

$= \frac{1}{3} y e^{3y}\Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{3}\int_0^{\ln 2} e^{3y}\,dy = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9} e^y\Big|_0^{\ln 2} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$

$\int_0^1 (x^2-x+\frac{1}{6})^2 = \int_0^1 \left(x^4-2x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)dx$

$= \frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{36} = \frac{1}{180}$

$\Rightarrow c_3 = \frac{1}{\|x^2-x+\frac{1}{6}\|^2}\left(\ln 2 - \frac{25}{36}\right) = \underline{180\ln 2 - 125}$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{3} c_j v_j = (2\ln 2 - 1) + (-12\ln 2 + 9)(x-\frac{1}{2}) + (180\ln 2 - 125)(x^2-x+\frac{1}{6})$

$= \underbrace{(180\ln 2 - 125)}_{=:a}x^2 + \underbrace{(-192\ln 2 + 134)}_{=:b}x + \underbrace{38\ln 2 - \frac{79}{3}}_{=:c}$

197) ZZ: Tschebyscheff-Polynome 1. Art bilden OGS in $Q_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,+1)$.

$T_n(x)$ mit $T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$

$\langle f,g\rangle_w = \langle T_n(x),T_m(x)\rangle_w = \int_{-1}^{1} T_m(x)\cdot T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \stackrel{?}{=} 0 \quad \forall n \neq m$

$\int_{-1}^{1} T_m(x)\cdot T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \cos\vartheta \\ dx = -\sin\vartheta\,d\vartheta \end{array} \right|$

$= \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta}}\, T_m(\cos\vartheta)\cdot T_n(\cos\vartheta)\cdot(-\sin\vartheta)\,d\vartheta$

$\stackrel{\sqrt{1-\cos^2\vartheta}=\sin\vartheta}{=} \int_0^{\pi} (\cos m\vartheta \cdot \cos n\vartheta)\,d\vartheta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\cos((m-n)\vartheta) + \cos((m+n)\vartheta)\right) d\vartheta$

$\stackrel{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-n}\cdot\sin((m-n)\vartheta) + \frac{1}{m+n}\sin((m+n)\vartheta)\right)\Big|_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-n}\underbrace{\sin((m-n)\pi)}_{0} + \frac{1}{m+n}\underbrace{\sin((m+n)\pi)}_{0}\right) = \underline{0}$ ✓

202) ZZ: $f(x) = \sin 2x \in Q_{e^{-x}}(0,\infty)$

$$\sin 2x \in Q_{e^{-x}}(0,\infty) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \sin 2x\, e^{x}\,dx \\ \int_0^\infty (\sin 2x)^2 e^{x}\,dx\end{array}\right\}\text{ konvergent}$$

$$\int_0^\infty \sin 2x \cdot e^{-x} \le \int_0^\infty \Big|\overbrace{\sin 2x}^{\in[-1,1]}\cdot e^{-x}\Big|\,dx \le \int_0^\infty e^{-x} = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

$$\int_0^\infty (\overbrace{\sin^2 2x}^{\in[0,1]}\cdot e^{-x})\,dx \le \int_0^\infty e^{-x} = 1$$

$\Rightarrow \sin 2x \in Q_{e^{-x}}(0,\infty)$.

Berechnen Sie Fourier-Koeff. von $\sin 2x$ bzgl. der Laguerre-Polynome mit Grad ≤ 2.

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

$$\Rightarrow L_0(x) = e^x\cdot e^{-x} = 1 \;;\quad L_1(x) = (-1)e^x(e^{-x} + e^{-x}\cdot x) = -1+x$$

$$L_2(x) = e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}(2xe^{-x} - x^2e^{-x})\right) = e^x(2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}) = -4x + x^2 + 2$$

L_0, L_1, L_2 bilden OGS $\Rightarrow$ FK können direkt berechnet werden:

$$c_0 = \frac{1}{\|L_0\|^2}\int_0^\infty \sin 2x\, e^{-x} = \int_0^\infty \underbrace{\sin 2x}_{g}\,\underbrace{e^{-x}}_{f'}\,dx$$

$$= \underbrace{\left(-\sin(2x)\, e^{-x}\right)\Big|_0^\infty}_{0} + 2\int_0^\infty \underbrace{\cos 2x}_{g}\,\underbrace{e^{-x}}_{f'}\,dx$$

$$= -2\cos 2x\cdot e^{-x}\Big|_0^\infty - 4\int_0^\infty \sin 2x\, e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow 5\int_0^\infty \sin 2x\,e^{-x}\,dx = 2 \Rightarrow \underline{c_0 = \frac{2}{5}}$$

$$c_1 = \frac{1}{\|L_1\|^2}\int_0^\infty \sin 2x\, L_1(x) e^{-x}\,dx = \int_0^\infty \overbrace{\sin 2x\,\underbrace{(x-1)}_{g}\,e^{-x}}^{f'}\,dx$$

$$= (x-1)\left(-\frac15 \sin 2x\, e^{-x} - \frac25\cos 2x\cdot e^{-x}\right)\Big|_0^\infty$$

$$+\frac15\int_0^\infty \sin 2x\, e^{-x} + \frac25\underbrace{\int_0^\infty \cos 2x\cdot e^{-x}}_{\frac15}$$

$$= -\frac25 + \frac15\,\frac25 + \frac25\,\frac15 = \underline{-\frac{6}{25}}$$

$$c_2 = \int_0^\infty \overbrace{\sin 2x\, e^{-x}}^{f'}\overset{g}{(x^2-4x+2)}\,dx = (x^2-4x+2)\left(-\frac15\sin 2x\, e^{-x} - \frac25\cos 2x\cdot e^{-x}\right)\Big|_0^\infty$$

$$+\frac25\int_0^\infty \sin 2x\, e^{-x}(x-2) + \frac45\int_0^\infty\cos 2x\cdot e^{-x}(x-2)$$

$$= \frac45 + \frac25\left(c_1 - \frac25\right) + \frac45\left(-\frac{13}{25}\right) = \frac{16}{125}$$

da $$\int_0^\infty \overbrace{\cos 2x\, e^{-x}}^{f'}\overset{g}{(x-2)} = (x-2)\left(-\frac15\cos 2x\, e^{-x} + \frac25 \sin 2x\, e^{-x}\right)\Big|_0^\infty$$

$$+\frac15\underbrace{\int_0^\infty\cos 2x\, e^{-x}}_{\frac15} - \frac25\underbrace{\int_0^\infty \sin 2x\, e^{-x}}_{\frac25} = -\frac25 + \frac1{25} - \frac4{25} = -\frac{13}{25}$$

$$\Rightarrow c_2 = \overset{\frac{1}{\|L_2\|^2}}{\frac14}\cdot\frac{16}{125} = \underline{\frac{4}{125}}$$