Analysis UE

X) 205, 210, 213, 214, 217, 218, 219

205) $f(x) = x^2$ auf $[-1, +1]$, periodisch fortgesetzt.

Beh. 1: $f(x) \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos n\pi}{(n\pi)^2} \cos n\pi x$

Bew.: $f \in Q(-1,1)$, f gerade $\Rightarrow$ reine Cosinusreihe, alle $b_n = 0$.

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

$$\text{mit } a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{x^2}_{g} \underbrace{\cos n\pi x}_{f'} \, dx$$

$$= \underbrace{x^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{g} \underbrace{\sin n\pi x}_{f'} \, dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left(x \left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) \right) \Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\frac{1}{n\pi} \int_{-1}^{1} \cos n\pi x \, dx}_{=0}$$

$$= \frac{2}{n\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\cos n\pi}{n\pi} = \frac{4 \cos n\pi}{(n\pi)^2} \qquad \forall n \neq 0$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

Beh. 2: Die punktweise Grenzfunktion ist x^2.

$$\text{Bew.: } \lim_{n \to \infty} s_n(f)(x) = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} (x+u)^2 \frac{\sin n\pi u}{\pi u} \, du$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} (x^2 + 2ux + u^2) \frac{\sin n\pi u}{\pi u} \, du$$

$$= x^2 \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} \frac{\sin n\pi u}{\pi u} + \frac{2x}{\pi} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} \sin n\pi u}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} \sin(n\pi u) \cdot u}_{\downarrow \, 0}$$

die Fourierkoeff.

$$\overset{\frac{\sin n\pi u}{\pi u} \text{ gerade}}{=} 2x^2 \underbrace{\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1} \frac{\sin n\pi u}{\pi u}}_{\downarrow \, \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}} = \underline{\underline{x^2}}$$

Bek. 3: Der Fehler im qu. Mittel bei Ersetzen von f durch $s_2(f)$

beträgt $\frac{1}{15} - \frac{17}{\pi^4} \approx -0{,}108$.

Bew.: $\|f - s_2(f)\|^2 = \cancel{\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx - \sum_{j=0}^{2} a_i^2 \|\cos n\pi x\|^2}$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2)^2\,dx - \left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{4\cos n\pi}{(n\pi)^2}\right)^2 \underbrace{\|\cos n\pi x\|^2}_{=\ell=1}\right)$$

$$= \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{2}\left(\frac{4\cos n\pi}{(n\pi)^2}\right)^2$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - \frac{(4\cos\pi)^2}{\pi^4} - \frac{(4\cos 2\pi)^2}{2^4\pi^4}$$

$$= \frac{1}{15} - \frac{16}{\pi^4} - \frac{16}{2^4\pi^4} = \underline{\underline{\frac{1}{15} - \frac{17}{\pi^4}}}$$

210) $f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{auf } (-\pi, 0] \\ \cos x & \text{auf } (0, \pi] \end{cases}$ Periode 2π

Bek. 1: $f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} \sin 2kx$

Bew.: f ungerade (mit Ausnahme der Stellen $x = k\pi$) $\Rightarrow a_n = 0\ \forall n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\cos x \sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos x \sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \underbrace{\cos x}_{g}\ \underbrace{\sin nx}_{f'}\,dx = -\cos x\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin x}_{g}\ \underbrace{\cos nx}_{f'}\,dx$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sin x\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos x \sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\cos x \sin nx\,dx = \frac{1+(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{(1+(-1)^n)\cdot n}{(n^2-1)} \qquad \forall n > 1$$

$n=1$: $\int_0^{\pi}\cos x \sin x\,dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt\end{matrix}\right|$

$$= -\int_1^{-1} (1-t^2)\,t\,dt = \int_{-1}^{1} t - t^3\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{4}t^4\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{(1+(-1)^n)\cdot n}{(n^2-1)} = \begin{cases} \frac{4n}{\pi(n^2-1)} & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases} \quad \forall n>1$$

$$b_1 = 0$$

$$\Rightarrow b_{2k} = \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}$$, also folgt die Behauptung.

Beh. 2: Für die punktweise Grenzfunktion gilt:

Bew.: $$\lim_{n\to\infty} s_n(f)(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq k\pi \\ 0 & x = k\pi \end{cases}$$

Kriterium von Dirichlet $\Rightarrow$ f stetig und sowohl links- als auch rechtsseitig diffbar an $x \neq k\pi$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n(f)(x) = f(x)$ dort.

Kriterium von Jordan: f in einer Umgebung von x sowohl links als auch rechts von x monoton $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n(f)(x) = \frac{f(x)^- + f(x)^+}{2}$

Betrachte also $f(x)^-$, $f(x)^+$ an $x = k\pi$:

$$x = 2k\pi \Rightarrow \begin{aligned} f(2k\pi)^- &= -\cos(2k\pi) = -1 \\ f(2k\pi)^+ &= \cos(2k\pi) = +1 \end{aligned}$$

$$x = (2k+1)\pi \Rightarrow \begin{aligned} f((2k+1)\pi)^- &= \cos(2k\pi+\pi) = -1 \\ f((2k+1)\pi)^+ &= -\cos(2k\pi+\pi) = +1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)^- + f(x)^+}{2} = 0 \quad \forall x = k\pi$$

also $$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx = \begin{cases} f(x) & x \neq k\pi \\ 0 & x = k\pi \end{cases}$$

Beh. 3: Der gesuchte Grenzwert ist $\frac{\pi}{8}$.

Bew.: Wir setzen $x = \frac{\pi}{6}$, dann folgt laut Beh. 2:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin k\frac{\pi}{3} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\sin k\frac{\pi}{3} = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 3j \\ \sin\frac{\pi}{3} & \text{für } k = 6j+1,\ k = 6j+2 \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \text{für } k = 6j+4,\ k = 6j+5 \end{cases}$$

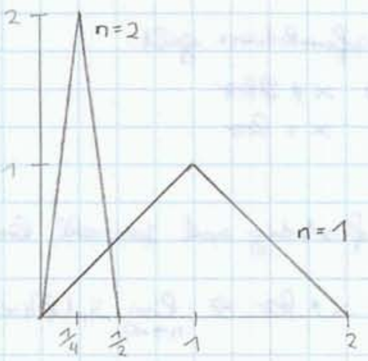
$$\Rightarrow \overset{1}{\cancel{\sin\frac{\pi}{3}}} = \frac{8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{6j+1}{4(6j+1)^2-1} + \frac{6j+2}{4(6j+2)^2-1}\right)\cancel{\sin\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{6j+4}{4(6j+4)^2-1} + \frac{6j+5}{4(6j+5)^2-1}\right)\cancel{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{3i+1}{4(3i+1)^2-1} + \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{3i+2}{4(3i+2)^2-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{3i+1}{4(3i+1)^2-1} + \frac{3i+2}{4(3i+2)^2-1}\right)$$

214) $f_n \in Q(a,b) \longrightarrow f$ punktweise $\not\Rightarrow$ f_n konvergiert im qu. Mittel.

Bew.: Sei $Q(a,b) = Q(0,2)$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & 0 \le x \le \frac{1}{n^2} \\ 2n - n^3 x & \frac{1}{n^2} \le x \le \frac{2}{n^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} n & x = \frac{1}{n^2} \\ \text{linear} & x \in \left(0, \frac{1}{n^2}\right) \cup \left(\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$\rightarrow f_n$ konv. punktweise gegen <u>Nullfunktion.</u>

aber $$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 (f-f_n)^2(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n^2(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^6 \int_0^{\frac{1}{n^2}} x^2\,dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{2}{n^2}} (2n - n^3 x)^2\,dx$$

$$\stackrel{\lim_{n\to\infty}}{=} \left(n^6 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{n^2}} + 4n^2 x \Big|_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{2}{n^2}} - 2n^4 x^2 \Big|_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{2}{n^2}} + n^6 \frac{x^3}{3} \Big|_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{2}{n^2}} \right)$$

$$\stackrel{\lim_{n\to\infty}}{=} \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{8} - 4 - \cancel{8} + 2 + \frac{8}{3} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) = \underline{\frac{2}{3}}$$

d.h. f_n konv. nicht im qu. Mittel gegen die Nullfunktion.

217) – ~~220)~~ 219) $f(x) = x^2$, Approximation durch Polynom 1. Grades $p(x) := a_1 x + a_0$

Bestimmung von p sowie der Approximationsfehlern bzgl. $\|\cdot\|_{sup}$ und im qu. Mittel.

217) <u>Taylorapproximation.</u> Wahl der ~~Nullstelle~~ Anschlussstelle a derart, dass der max. auf $[0,2]$ auftretende Fehler minimal wird.

$$T_1(f,a) = \sum_{n=0}^{1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$
$$= a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$$

ges.: $a \in \mathbb{R}$ derart, dass $\sup\limits_{x\in[0,2]} \left| f - T_1(f,a)\right| = \sup\limits_{x\in[0,2]} \underbrace{(x-a)^2}_{=:\, g_a(x)}$ minimal wird.

$$g_a'(x) = 2(x-a) \Rightarrow g_a(x) \begin{cases} \text{Minimum an } x=a \\ \text{mon.} \searrow \quad x<a \\ \text{mon.} \nearrow \quad x>a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,2]} (x-a)^2 < s \Leftrightarrow \underbrace{\max\{a^2, (2-a)^2\}}_{\text{wird minimal für } a=1} < s$$

also: <u>$p(x) = 2x-1$</u>.

<u>Fehler bzgl. $\|\cdot\|_{sup}$:</u>

$$\|f-p\|_{sup} = \sup_{x\in[0,2]} |f(x)-p(x)| = \sup_{x\in[0,2]} (x-1)^2 = \underline{1}$$

<u>Fehler im qu. Mittel:</u>

$$\int_0^2 (f-p)^2(x)\,dx = \int_0^2 (x-1)^4\,dx = \left| \begin{matrix} y = x-1 \\ dy = dx \end{matrix} \right| = \int_{-1}^{1} y^4\,dy = \frac{1}{5}y^5 \Big|_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

218) <u>Fourierapproximation</u> auf $Q(0,2)$.

$x^2 \in Q(0,2) \Rightarrow$ Fehler im qu. Mittel wird minimal, wenn a_0, a_1 Fourier-Koeff. bzgl. eines OGS sind.

$u = \{1, x\}$

OGS-Verf. von Schmidt:

$v_0 = u_0 = 1$

$v_1 = u_1 - \frac{\langle u_1, v_0\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0 = x - 1$, da $\|v_0\|^2 = \int_0^2 1\,dx = x\Big|_0^2 = 2$

$\langle v_1, v_0\rangle = \int_0^2 x\,dx = 2$

$\Rightarrow v = \{1, x-1\}$ ist OGS.

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{j=0}^{1} c_j v_j \quad \text{mit} \quad c_j = \frac{1}{\|v_j\|} \int_0^2 (f \cdot v_j)(x)\,dx$$

$$\|v_0\| = 2 \quad \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\|v_1\| = \int_0^2 (x-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} y^2\,dy = \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 (x-1)^2\,dx$$

$$= \frac{3}{2} \left(\int_0^2 x^3\,dx - \int_0^2 x^2\,dx \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} x^4 \Big|_0^2 - \frac{4}{3} \right) = 2$$

also $\underline{p(x)} = \frac{4}{3} + 2(x-1) = \underline{2x - \frac{2}{3}}$

Fehler bzgl $\|\cdot\|_{sup}$:

$$\|f - p\|_{sup} = \sup_{x \in [0,2]} \left| x^2 - 2x + \frac{2}{3} \right| = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Fehler im qu. Mittel:

$$\int_0^2 (f-p)^2(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^2 \left((x-1)^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (x-1)^4\,dx - \frac{2}{3} \int_0^2 (x-1)^2\,dx + \frac{1}{9} \int_0^2 dx$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \underline{\underline{\frac{8}{45}}}$$

219) Bestapproximation bzgl. $\|\cdot\|_{sup}$

Beh.: Die gesuchte Approximationsfunktion ist $p(x) = 2x - \frac{1}{2}$.

Bew.: Aufgrund der Charakteristik von $f - p$ gilt $\sup_{x \in [0,2]} \left| x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$

Ann.: $\exists\, a_1, a_0$ derart, dass $\sup_{x \in [0,2]} \left| x^2 - \underbrace{(a_1 x + a_0)}_{=: q(x)} \right| < \frac{1}{2}$

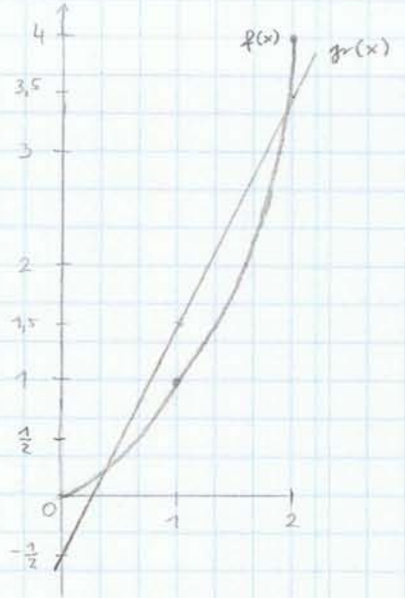
$$\Rightarrow |x^2 - a_1 x - a| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0,2]$$

$\Rightarrow$ Bed. speziell erfüllt für $x \in \{0, 1, 2\}$

$$\Leftrightarrow \max \left\{ |(f-q)(0)|, |(f-q)(1)|, |(f-q)(2)| \right\} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \max \left\{ |a_0|, |1 - a_1 - a_0|, |4 - 2a_1 - a_0| \right\} < \frac{1}{2}$$

Bed. nur erfüllbar für $|a_0| < \frac{1}{2}$, also $a_0 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



an Skizze leicht erkennbar, dass gelten muss:

$(f-q)(1) < 0 \qquad (f-q)(2) > 0$

also:

$a_1 + a_0 - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1 < \frac{3}{2} - a_0$

$4 - 2a_1 - a_0 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a_1 - 2 > \frac{3}{2} - a_0$

$a_0 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \tilde{a}_0 := \frac{3}{2} - a_0 \in (1,2)$

$\Rightarrow a_1 < \tilde{a}_0 < 2a_1 - 2$ ↯ da $a_1 < 2$ und $a_1 < 2a_1 - 2$ nicht gelten kann.

$\Rightarrow p(x)$ ist <u>Bestapproximation</u>.

<u>Fehler bzgl. $\|\cdot\|_{sup}$:</u>

$$\sup_{x \in [0,2]} |f - p| = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

<u>Fehler im qu. Mittel:</u>

$$\begin{aligned} \int_0^2 (f-p)^2(x)\,dx &= \int_0^2 \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 \left((x-1)^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 (x-1)^4\,dx - 2\int_0^2 (x-1)^2\,dx + \frac{1}{4}\int_0^2 dx \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{30}}} \end{aligned}$$