Analysis 3 UE

III, 17. $\langle X, \tau \rangle$ top. Raum ; $\mathcal{B} \subseteq$ ~~Basis von~~ τ

<u>ZZ</u>: $\mathcal{B}$ Basis von τ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$: $\mathfrak{W}_{\mathcal{B}}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ ist Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$

„$\Leftarrow$" $\mathfrak{W}_{\mathcal{B}}(x)$ ist FB $\Rightarrow$ $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ $\exists B \in \mathfrak{W}_{\mathcal{B}}(x)$: $B \subseteq U$.

Sei nun $O \in \tau$ bel., d.g.

$\forall x \in O$ $\exists B_x \in \mathfrak{W}_{\mathcal{B}}(x)$: $B_x \subseteq O$, da $O \in \mathcal{U}(x)$

Wegen $B_x \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ Basis von τ.

„$\Rightarrow$" $\mathcal{B}$ Basis von τ, d.h. $\forall O \in \tau, x \in O$ $\exists B_x \in \mathcal{B}$: $x \in B_x \subseteq O$.

$x \in B_x \Rightarrow B_x \in \mathfrak{W}_{\mathcal{B}}(x)$

Es gilt $\forall U \in \mathcal{U}(x)$: $\exists O \in \tau$: $x \in O \subseteq U$

und somit $\forall U \in \mathcal{U}(x)$: $\exists B \in \mathfrak{W}_{\mathcal{B}}(x)$: $x \in B (\subseteq O) \subseteq U$.

$\Rightarrow \mathfrak{W}_{\mathcal{B}}(x)$ ist FB von $\mathcal{U}(x)$.

22. a) $(x_i)_{i \in I}$ Netz ; $x_i \in X$ $\forall i \in I$, $x \in X$.

<u>ZZ:</u> $\lim_{i \in I} x_i = x$ in $\langle X, \tau|_X \rangle$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{i \in I} x_i = x$ in $\langle Y, \tau \rangle$

„$\Rightarrow$" $\lim_{i \in I} x_i = x$ in $\langle X, \tau|_X \rangle$, d.h. $\forall U \in \mathcal{U}_{\tau|_X}(x)$ $\exists i_0 \in I$: $x_i \in U$ $\forall i > i_0$

$U \in \mathcal{U}_{\tau|_X}(x) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{U}_\tau(x)$: $U = V \cap X$

$\Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}_\tau(x)$ $\exists i_0 \in I$: $x_i \in V \cap X \subseteq V$ $\forall i > i_0$

also konv. $x_i \to x$ in $\langle Y, \tau \rangle$

„$\Leftarrow$" $\lim_{i \in I} x_i = x$ in $\langle Y, \tau \rangle$, d.h. $\forall V \in \mathcal{U}_\tau(x)$ $\exists i_0 \in I$: $x_i \in V$ $\forall i > i_0$.

$V \in \mathcal{U}_\tau(x) \Rightarrow U = V \cap X \in \mathcal{U}_{\tau|_X}(x)$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{\tau|_X}(x)$ $\exists i_0 \in I$: $x_i \in V \cap X = U$.

also konv. in $\langle X, \tau|_X \rangle$.

b) $(x_i)_{i\in I}$ Netz; $x_i \in X \ \forall i \in I$. $\lim\limits_{i\in I} x_i = x$ in $\langle Y, \tau\rangle$.

Folgt daraus Konvergenz in $\langle X, \tau|_X\rangle$?

<u>Gegenbsp.:</u> $\langle Y, \tau\rangle = \langle \mathbb{R}, \mathcal{E}\rangle$

$X = (a, b)$ mit $a+1 < b$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Netz, $x_n = a + \frac{1}{n} \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$x_n \to a$ in $\langle \mathbb{R}, \mathcal{E}\rangle$, da $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ x_n \in U_\varepsilon(a) \ \forall n > N$.

Aber (x_n) konv. gegen keinen Punkt in $\langle (a,b), \mathcal{E}|_{(a,b)}\rangle$, denn:

Sei $c \in (a,b)$. Wähle ein $\varepsilon < c-a$ ($\Leftrightarrow c - \varepsilon > a$).

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \ x_n \notin U_\varepsilon(c) \cap (a,b) \ \forall n > N$.

23) $\langle X, d\rangle$ metr. Raum, $Y \subseteq X$. $\Rightarrow \tilde{d} := d|_{Y\times Y}$ Metrik auf Y.

τ_d, $\tau_{\tilde{d}}$ von Metriken ~~erzeugte~~ indus. Top. auf X bzw. Y.

<u>ZZ:</u> $\tau_{\tilde{d}} = \tau_d|_Y$

„$\supseteq$" Sei $O \in \tau_d$, $x \in O \cap Y$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(x) \subseteq O$

$\Rightarrow \underbrace{U_\varepsilon(x) \cap Y}_{\in \tau_{\tilde{d}}} \subseteq O \cap Y \in \tau_d|_Y$

also ist $O \cap Y$ offen bzgl. $\tilde{d}$, d.h. $\tau_d|_Y \subseteq \tau_{\tilde{d}}$

„$\subseteq$" Sei $P \in \tau_{\tilde{d}}$, $x \in P$. $\Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0: \ U_{\varepsilon_x}(x) \cap Y \subseteq P$

$\Rightarrow P = \bigcup\limits_{x\in P} (Y \cap U_{\varepsilon_x}(x)) = Y \cap \underbrace{\bigcup\limits_{x\in P} U_{\varepsilon_x}(x)}_{\in \tau_d} \in \tau_d|_Y$, d.h. $\tau_{\tilde{d}} \subseteq \tau_d|_Y$.

also: $\tau_{\tilde{d}} = \tau_d|_Y$

28. $X \neq \emptyset, \quad \mathbb{R}^X = \{f \mid f: X \to \mathbb{R}\} = \prod_{x\in X} \mathbb{R}$.

$\tau := \prod_{x\in X} \mathcal{E}$ Produkttopologie auf $\mathbb{R}^X$.

29. ZZ: $\mathcal{B} := \{V_{x_1,\dots,x_n;\varepsilon}(f) \mid n\in\mathbb{N};\ x_1,\dots,x_n \in X;\ \overset{\varepsilon>0}{\forall} f\in\mathbb{R}^X\}$ mit

$V_{x_1,\dots,x_n;\varepsilon}(f) := \{g\in\mathbb{R}^X : |g(x_j)-f(x_j)|<\varepsilon \ \forall j\in\{1,\dots,n\}\}$

ist Basis von τ.

Wissen: Menge aller O der Gestalt $O = \prod_{x\in X} O_x$ mit $O_x \in \mathcal{E}$, $O_x = \mathbb{R}$ für fast alle $x\in X$ bildet Basis von τ.

$g \in V_{x_1,\dots,x_n;\varepsilon}(f) \iff g(x_j) \in (f(x_j)-\varepsilon, f(x_j)+\varepsilon) \ \forall j\in\{1,\dots,n\}$,
alle anderen $X \setminus \bigcup_{j=1}^{n}\{x_j\}$ egal

$\iff g \in \prod_{x\in X} O_x$ mit $O_x = (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \in \mathcal{E}$ für $x\in\{x_1,\dots,x_n\}$
$O_x = \mathbb{R}$ sonst

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist Basis von τ.

(Z1) $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_d\rangle \quad d(x,y) = |x-y|$

$I := \{(n,m)\in\mathbb{N}^2 \mid n>m\}$

$i=(m,n),\ j=(k,\ell)\in I: \quad i \preceq j :\iff \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^m} \geq \frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^\ell}$

a) ZZ: $(I,\preceq)$ gerichtete Menge, d.h. $\forall i,j\in I\ \exists k\in I: k \succeq i \wedge k\succeq j$.

$i=(i_1,i_2)$, $j=(j_1,j_2)$: wähle $k=(k_1,k_2)$ mit $k_h := \max\{i_h, j_h\}$ $h\in\{1,2\}$

$k\in I$, da $i_1<i_2$, $j_1<j_2 \Rightarrow \max\{i_1,j_1\} < \max\{i_2,j_2\}$

$i \preceq k$, da $2^{-i_1}+2^{-i_2} \geq 2^{-i_1\vee -j_1} + 2^{-i_2 \vee -j_2}$

$j\preceq k$ analog.

b) ZZ: $(x_i)_{i\in I} \to 0$ mit $x_i = 2^{-n}+2^{-m}$, $i=(n,m)\in I$.

Sei $U\in\mathcal{U}(0) \Rightarrow \exists \varepsilon>0: K_\varepsilon(0)\subseteq U$

$x_i \in K_\varepsilon(0) \iff |0-x_i| = x_i = 2^{-n}+2^{-m} < \varepsilon$

$\forall \underset{(k,\ell)}{j} \succeq \underset{(m,n)}{i}$ folgt daher $2^{-k}+2^{-\ell} \leq 2^{-n}+2^{-m} < \varepsilon$, also $x_i \to 0$

c) folgt

d) ges.: Umgebungsbasis $\mathcal{E}$ von 0, sodass $\exists$ Bijektion $\tau: I \to \mathcal{E}$

mit $i \preccurlyeq j \Leftrightarrow \tau(i) \supseteq \tau(j)$.

Wissen: offene Kugeln mit Mittelpunkt 0 bilden FB von $\mathcal{U}(0)$.

Sei $r(i) = 2^{-m} + 2^{-n}$ für $i = (n, m)$.

$\Rightarrow \tau(i) := K_{r(i)}(0) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y| < 2^{-n} + 2^{-m} \}$

Es gilt: •) $i \preccurlyeq j \Leftrightarrow r(i) \geq r(j)$

$\Leftrightarrow K_{r(i)}(0) \supseteq K_{r(j)}(0) \Leftrightarrow \tau(i) \supseteq \tau(j)$

•) $\mathcal{E} := \{ \tau(i) \mid i \in I \}$ bildet Filterbasis, da $\forall \varepsilon > 0$

$\exists i_\varepsilon = (m_\varepsilon, n_\varepsilon): K_{r(i_\varepsilon)}(0) \subseteq K_\varepsilon(0)$.

•) τ bijektiv, da r injektiv:

$\underset{n > m}{i = (n, m)} \neq \underset{k > l}{j = (k, l)} \Rightarrow 2^{-n} + 2^{-m} \neq 2^{-k} + 2^{-l}$.

Z2) X Menge; τ_1, τ_2 Top. auf X.

<u>ZZ:</u> $\tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow \forall \langle Y, \mathcal{O} \rangle, f: X \to Y$: f $\tau_1|\mathcal{O}$-stetig $\Leftrightarrow f$ $\tau_2|\mathcal{O}$ stetig.

„$\Rightarrow$" Trivial

„$\Leftarrow$" •) Wähle $f = id_X$, $\langle Y, \mathcal{O} \rangle = \langle X, \tau_1 \rangle$

id $\tau_1|\tau_1$ stetig $\Rightarrow id$ $\tau_2|\tau_1$ stetig

$\Rightarrow \forall O \in \tau_1: id^{-1}(O) = O \in \tau_2$, also $\tau_1 \subseteq \tau_2$

•) $f = id$, $\langle Y, \mathcal{O} \rangle = \langle X, \tau_2 \rangle$

analog id $\tau_1|\tau_2$ stetig $\Rightarrow id^{-1}(\tau_2) = \tau_2 \subseteq \tau_1$.

Gilt auch $\tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow \forall \langle Y, \mathcal{O} \rangle, f: Y \to X$: f $\mathcal{O}|\tau_1$-stetig $\Leftrightarrow f$ $\mathcal{O}|\tau_2$-stetig?

Ja, Beweis analog.

ad Z1 c) $\sigma: \mathbb{N} \to I$ bij., $X_s := x_{\sigma(s)}$ $s \in \mathbb{N}$,

<u>ZZ:</u> $(X_s)_{s \in \mathbb{N}}$ ist nicht konvergent.

Bilde Teilfolge $(X_{m_{0_s}})_{s \in \mathbb{N}}$ mit $X_{m_{0_s}} = X_{m_0(s)}$; $m_0: \mathbb{N} \to \{ s \in \mathbb{N} \mid \sigma(s) = (n, m_0) \}$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}: d(2^{-m_0}, X_{m_{0_s}}) = d(2^{-m_0}, 2^{-m_0} + 2^{-n}) = 2^{-n} < \varepsilon$ $\forall s > N$. $\Rightarrow$ m_0 ist GW, gilt $\forall m_0 \in \mathbb{N}$, also (X_s) nicht konvergent.

24. $\langle X_n, d_n \rangle$ metr. Räume, τ_n von d_n auf X_n indus. Top.

$X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit Produkttopologie $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$.

$d, \tilde{d}$ Metriken auf X (siehe Aufg 2) mit indus. Top. τ_d bzw. $\tau_{\tilde{d}}$.

<u>ZZ:</u> $\tau_d = \tau_{\tilde{d}} = \tau$

Zunächst eine einfache Überlegung:

Sei $r \in [0,1]$, d.g.

$$r = \hat{d}_n(x,y) = \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \iff d_n(x,y) = \frac{1}{r-1}$$

Die von $\hat{d}_n$ indus. Top. auf X_n stimmt also mit τ_n überein.

Wähle $x \in X$ beliebig.

(i) Sei $y \in K_{d,r}(x)$. $\iff \max_{n\in\mathbb{N}} c_n \hat{d}_n(x_n,y_n) = d(x,y) < r$.

Wissen: $c_n \to 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$: $c_n < r \ \forall n > N$.

•) $n \le N$:

$$c_n \hat{d}_n(x_n,y_n) = \frac{c_n}{\tilde{c}_n} \tilde{c}_n \hat{d}_n(x_n,y_n) \le \overset{\max_{n\le N} \frac{c_n}{\tilde{c}_n}}{\overset{\shortparallel}{C_N}} \tilde{c}_n \hat{d}_n(x_n,y_n)$$

$$\le C_N \sum_{k\in\mathbb{N}} \tilde{c}_k \hat{d}_k(x_k,y_k) = C_N \tilde{d}(x,y) < C_N \tilde{r} = r.$$

•) $n > N$: $c_n \hat{d}_n(x_n,y_n) \le c_n < r$

Es gilt also insgesamt: $y \in K_{\tilde{d},\tilde{r}}(x) \Rightarrow y \in K_{d,r}(x)$ für $\tilde{r} := \frac{r}{C_N}$,

also $K_{\tilde{d},\tilde{r}}(x) \subseteq K_{d,r}(x)$

$K_{d,r}(x)$ ist also offen in $\tau_{\tilde{d}}$, bilden Basis von τ_d $\Rightarrow \tau_d \subseteq \tau_{\tilde{d}}$.

(ii) Sei $y \in K_{\tilde{d},\tilde{r}}(x)$.

Wissen: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{c}_n < \infty \Rightarrow$ Wähle $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{n>N} \tilde{c}_n < \frac{\tilde{r}}{2}$.

$$\tilde{d}(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{c}_n \hat{d}_n(x_n,y_n) = \sum_{n=1}^{N} \tilde{c}_n \hat{d}_n(x_n,y_n) + \underbrace{\sum_{n>N} \tilde{c}_n \hat{d}_n(x_n,y_n)}_{\le \sum_{n>N} \tilde{c}_n < \frac{\tilde{r}}{2}} < \tilde{r}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \tilde{c}_n \hat{d}_n(x_n,y_n) < \sum_{n=1}^{N} \tilde{c}_n r_n = \frac{\tilde{r}}{2} \quad \text{für } r_n = \frac{\tilde{r}}{2\tilde{c}_n \cdot N}$$

$$y \in K_{\hat{d}_n,r_n}(x_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } r_n := \begin{cases} & n \le N \\ 1 & n > N \end{cases} \Rightarrow y \in K_{\tilde{d},\tilde{r}}(x)$$

also $\prod_{n\in\mathbb{N}} K_{\hat{d}_n,r_n}(x_n) \subseteq K_{\tilde{d},\tilde{r}}(x) \Rightarrow \tau_{\tilde{d}} \subseteq \tau$.

(iii) Sei $y \in \prod_{n \in \mathbb{N}} K_{\hat{d}_n, r_n}(x)$ mit $r_n = 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Bezeichne $M := \{ n \in \mathbb{N} \mid r_n < 1 \}$.

•) $n \in M$:

$$c_n \hat{d}(x_n, y_n) < \max_{n \in \mathbb{N}} c_n \hat{d}(x_n, y_n) < \gamma < c_n r_n$$

für $\gamma = \min_{n \in M} c_m r_m$

•) $n \notin M$:

$$\hat{d}(x_n, y_n) < r_n = 1 \Rightarrow d(x,y) < c_n r_n = c_n$$

Es gilt also: $y \in K_{d,\gamma}(x) \Rightarrow y \in \prod_{n \in \mathbb{N}} K_{\hat{d}_n, r_n}(x)$

$\Rightarrow K_{d,\gamma}(x) \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} K_{\hat{d}_n, r_n}(x) \Rightarrow \tau \subseteq \tau_d$

Man erhält also insgesamt:

$$\tau_d \subseteq \tau_{\tilde{d}} \subseteq \tau \subseteq \tau_d \Rightarrow \tau_d = \tau_{\tilde{d}} = \tau.$$