

# Angewandte Statistik UE

## II, 1) Polarmethode

a) ZZ:  $u_1, u_2$  uniform verteilte ZFZ;  $v_i = 2u_i - 1$ ;  $s = v_1^2 + v_2^2$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-2\ln s}{s}} v_1, y = \sqrt{\frac{-2\ln s}{s}} v_2 \text{ normalverteilte ZFZ für } s \leq 1.$$

Beh. 1:  $U_i \sim U_{0,1} \Rightarrow V_i = 2U_i - 1 \sim U_{-1,1}$

Bew.: klar.

$V = (V_1, V_2)$  ist also gleichverteilt auf  $(-1, 1)^2$

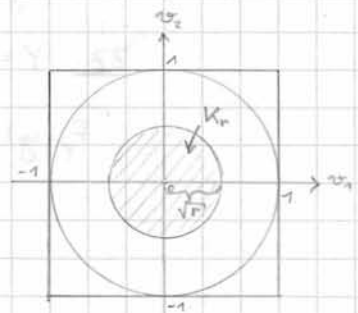
Beh. 2:  $V = (V_1, V_2)$  glv. auf der obg. Einheitskreisscheibe

$$\Rightarrow S := V_1^2 + V_2^2 \sim U_{0,1}$$

Bew.: Sei  $K_r := \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$ .

$$\begin{aligned} F_S(r) &= P([S \leq r]) = P(S^{-1}([0, r])) \\ &= P(K_r) \stackrel{\text{GL-Vd.V}}{=} \frac{\lambda_2(K_r)}{\lambda_2(K_1)} = \frac{r\pi}{\pi} = r. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \sim U_{0,1}$$



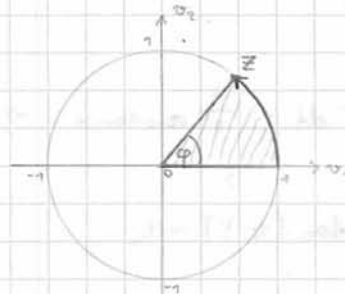
Beh. 3:  $V = (V_1, V_2)$  glv. auf der obg. Einheitskreisscheibe, d.h.

$$V = (\sqrt{S} \cos \Phi, \sqrt{S} \sin \Phi) \text{ für } S \leq 1, \Phi \in (0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \Phi \sim U_{0, 2\pi}$$

Bew.:  $Z = \frac{V}{\sqrt{S}} = (\cos \Phi, \sin \Phi)$  liegt auf dem Einheitskreis

Definiere also  $\Phi: K(Z) \mapsto \varphi$  mit  $K(Z)$  Kreissektor mit Kreisbogen von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  bis  $Z$ .



$$F_\Phi(\varphi) = P([\Phi \leq \varphi]) = P(\Phi^{-1}(\varphi)) \stackrel{\text{GL-Vd.V}}{=} \frac{\lambda_2(\Phi^{-1}(\varphi))}{\lambda_2(\Phi^{-1}(2\pi))} = \frac{1}{\pi} \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \Phi \sim U_{0, 2\pi}$$

Beh. 4:  $X = \sqrt{-2 \ln S} \cdot \frac{V_1}{\sqrt{S}} \sim N(0,1)$

$Y = \sqrt{-2 \ln S} \cdot \frac{V_2}{\sqrt{S}} \sim N(0,1)$  für  $V_1, V_2$  glw. in abg. Einheitskreisscheibe

Bew.: siehe Box-Muller mit

$U_1 := S \sim U_{0,1}$

$U_2 := \frac{1}{2\pi} \cdot \Phi \sim U_{0,1} \quad \left[ \frac{V}{\sqrt{S}} = (\cos \Phi, \sin \Phi) \right]$

$U_1 \perp U_2$ , da Abstand zum Mittelpunkt nichts über Winkel aussagt.

6) Wie viele glw. Paare benötigt man im Schnitt für ein  $N(0,1)$ -vert. Paar?

$P([S \leq 1]) = \frac{\lambda_2(U_1)}{\lambda_2((-1,1)^2)} = \frac{\pi}{4}$

also benötigt man ca.  $\frac{4}{\pi} \approx 1,27$  glw. Paare.

2a)  $X$  stetig verteilt mit Verteilungsfkt.  $F_X$  (rechtstetig, monoton  $\uparrow$ )

ZZ:  $Y := F_X(X) \sim U_{0,1}$

$F_Y(y) = P([Y \leq y]) = P([F_X(X) \leq y])$

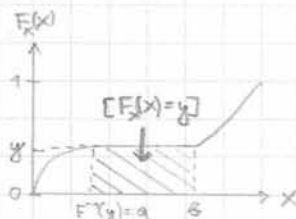
$= P([X \leq F_X^{-1}(y)]) + P([F_X(X) = y])$

$= P([X \in [a, b]])$  mit  $a := F_X^{-1}(y)$

$b := \sup\{x \mid F_X(x) = y\}$

$= F_X(b) - F_X(a) = 0$

$= F_X(F_X^{-1}(y)) = y.$



6) Inversionsmethode

Sei  $Y \sim U_{0,1}$ ,  $X := F_X^{-1}(Y)$ .

$\Rightarrow P([X \leq x]) = P([F_X^{-1}(Y) \leq x]) = P([Y \leq F_X(x)]) = F_Y(F_X(x)) = F_X(x).$

Sei  $X \sim t_1$ , d.h.

$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} \arctan x \Rightarrow x = \tan(\pi \underbrace{F_X(x)}_{=y})$

$\Rightarrow X := F_X^{-1}(Y) = \tan(\pi Y) \sim t_1$

c)  $X \sim P_5$ , d.h.  $F_X(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{5^n}{n!} e^{-5}$

$\Rightarrow X := F_X^{-1}(Y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq Y\} = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid F_X(n) \geq Y\} \sim P_5.$

$$3) X \sim t_n \Rightarrow Y := X^2 \sim ?$$

$$Y = X^2 \Rightarrow X = \pm \sqrt{Y}$$

Transformationsatz:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\sqrt{y}) \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \stackrel{\text{Dichte symm.}}{=} 2 f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{n} B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}) (1 + \frac{y}{n})^{(n+1)/2}} \\ &= \frac{n^{(n+1)/2}}{\sqrt{y} \sqrt{n} B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}) (n+y)^{(n+1)/2}} \\ &= \frac{n^{\frac{n}{2}} y^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}) (y+n)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y \sim F(1, n)$$

4)  $f_n \dots$  Dichte des  $t_n$ -Vert.  
 $\varphi \dots$  Dichte des  $N(0,1)$ -Vert.

a) ZZ:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n} \underbrace{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}_{\sqrt{\pi}}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n} \Gamma(\frac{n}{2})} \right)}_{\textcircled{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}_{= e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ da } (1 + \frac{a}{n})^n \rightarrow e^a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n} \Gamma(\frac{n}{2})} &\stackrel{\text{Hörner.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n} \sqrt{2\pi}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) Folgt daraus die Verteilungskonvergenz?

$$\left. \begin{aligned} \text{Ja, laut Satz von Scheffé gilt: } \int \varphi \, d\mu &= \int f_n \, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ f_n &\rightarrow \varphi \quad \mu\text{-f.ä.} \\ f_n &\geq 0 \quad \forall n, \varphi \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5)  $X_i, i=1, \dots, n$  i.i.d. mit Dichte  $f$ , Träger  $(a, b)$

ges.: gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ .

Sei  $T: (a, b)^n \rightarrow Y$  und  $Y = \{(y_1, \dots, y_n) \in (a, b)^n \mid y_1 \leq \dots \leq y_n\}$ .  
 $(X_1, \dots, X_n) \mapsto (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$

Es gilt:  $T^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \{\pi(y_1, \dots, y_n) \mid \pi \in S_n\} \quad \forall y \in Y$

$$(a, b)^n = \bigcup_{\pi \in S_n} \pi(Y)$$

Jede Permutation  $\pi$  lässt sich darstellen durch eine Permutationsmatrix  $\Pi$

der Gestalt  $\Pi = (\pi(e_1), \dots, \pi(e_n))$ .  $\Rightarrow |\det \Pi| = 1$ .

Man beobachtet:

$$\frac{\partial \pi(y_i)}{\partial y_j} = \begin{cases} 1 & \pi(y_i) = y_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Leftrightarrow \Pi_{ij} = 1$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{ij} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial y} = \Pi \quad \forall \pi \in S_n$ , also  $\pi$  stetig diffb.

Transformationsatz:

$$f_{\pi(x)}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\pi \in S_n} f_x(\pi(y_1), \dots, \pi(y_n)) \cdot \overbrace{|\det \frac{\partial \pi}{\partial y}|}^{=1}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n f_x(\pi(y_i)) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n f_x(y_i)$$

$$= n! \prod_{i=1}^n f_x(y_i) \quad \forall y \in Y$$

6)  $X_i, i=1, \dots, n$  i.i.d. mit Verteilungsfkt.  $F$ , Dichte  $f$

a)  $F_{X_{(n)}}(x) = P([X_{(n)} \leq x])$

$$= P([\text{mind. } n \text{ der } X \leq x])$$

$$= \sum_{k=n}^n P([k \text{ der } X \leq x])$$

$$= \sum_{k=n}^n \binom{n}{k} P([X \leq x])^k (1 - P([X \leq x]))^{n-k}$$

$$= \sum_{k=n}^n \binom{n}{k} [F(x)]^k [1 - F(x)]^{n-k}$$

6) ges.: Dichte von  $X_{(r)}$ , speziell für  $X \sim U_{0,1}$

$$(i) f_{X_{(r)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(r)}}(x)$$

$$= \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \left\{ k [F(x)]^{k-1} \cdot f(x) \cdot [1-F(x)]^{n-k} - [F(x)]^k \cdot (n-k) [1-F(x)]^{n-k-1} \cdot f(x) \right\}$$

$$= \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} f(x) [F(x)]^{k-1} [1-F(x)]^{n-k-1} \cdot \underbrace{\{k(1-F(x)) - F(x)(n-k)\}}_{k-F(x) \cdot n}$$

$$X \sim U_{0,1} \Rightarrow f(x) = 1_{(0,1)}(x), \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \in (0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{X_{(r)}}(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} (k-x \cdot n) \quad x \in (0,1)$$

$$f_{X_{(r)}}(x) = 0 \quad \text{sonst}$$

$$(ii) Y \sim B_{n,p} \Rightarrow P[Y \geq r] = 1 - P[Y \leq r-1] = 1 - P[Z \leq r] = P[Z \leq r] - F_Z(r) \quad \text{für } Z \sim \text{Be}_1(r, n-r+1).$$

$$\begin{aligned} f_{X_{(r)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(r)}}(x) = \frac{d}{dx} P[Y \geq r] \\ &= \frac{d}{dx} F_Z(F(x)) = f_Z(F(x)) \cdot f(x) \\ &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{F(x)} f_Z(t) dt = \frac{d}{dx} \\ &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} F(x)^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} \cdot f(x) \end{aligned}$$

$$X \sim U_{0,1} \Rightarrow f_{X_{(r)}}(x) = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} x^{r-1} (1-x)^{n-r} \cdot 1_{(0,1)}.$$