# Angewandte Statistik UE

VII) 1) Sei $I := \left[ \frac{(n-1) S_n^2}{b}, \frac{(n-1) S_n^2}{a} \right]$ KI für $\sigma^2$ mit ÜW $1-\alpha$

$$\sigma^2 \in I \Leftrightarrow Z := \frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2 \in [a,b]$$

$$\left. \begin{array}{l} [a,b] \text{ KI} \Rightarrow W_\theta\{Z \in [a,b]\} = 1-\alpha \\ Z \sim \chi^2_{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f_{n-1}(x)\, dx = 1-\alpha .$$

Bestimme nun $a, b \in \mathbb{R}^+$ derart, dass $\lambda(I)$ minimal.

Löse Optimierungsproblem (Lagrange):

$$\min_{a,b} \lambda(I) \Leftrightarrow \min_{a,b} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad \text{s.t.} \quad \int_a^b f_{n-1}(x)\, dx = 1-\alpha .$$

$$L(a,b,\lambda) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \lambda \left( \int_a^b f_{n-1}(x)\, dx - 1 + \alpha \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{1}{a^2} - \lambda f_{n-1}(a) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{a^2 f_{n-1}(a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{1}{b^2} + \lambda f_{n-1}(b) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{b^2 f_{n-1}(b)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow -\frac{1}{a^2 f_{n-1}(a)} = -\frac{1}{b^2 f_{n-1}(b)} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 f_{n-1}(b) = a^2 f_{n-1}(a). \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = F_{n-1}(b) - F_{n-1}(a) - 1 + \alpha = 0 \end{array} \right\} \rightsquigarrow a^*, b^*$$

$$\Rightarrow I := \left[ \frac{(n-1) S_n^2}{a^*}, \frac{(n-1) S_n^2}{b^*} \right] \text{ ist minimales KI für } \sigma^2.$$

Ist $\left[ \frac{\sqrt{n-1}\, S_n}{\sqrt{a^*}}, \frac{\sqrt{n-1}\, S_n^2}{\sqrt{b^*}} \right]$ minimales KI für $\sigma$?

Neues Optimierungsproblem:

$$\min_{a,b} \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \quad \text{s.t.} \quad \int_a^b f_{n-1}(x)\, dx = 1-\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$\min_{a,b} \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, da $\sqrt{\ }$ streng monoton. $\Rightarrow$ selbes $a^*, b^*$ wie oben.

2) $X_1, \ldots, X_n \sim A_\theta$ i.i.d $\Rightarrow EX_i = \theta$, $\operatorname{Var} X_i = \theta(1-\theta)$

ges.: KI für $\theta$ mit ÖW $1-\gamma_1-\gamma_2$ (Konstr. mit der „anderen" Methode)

Suffiziente Statistik $Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B_{n,\theta}$

Satz 1.3.8: $W\{Y_n \leq m\} = W\{Z \leq \frac{m+1}{n-m} \frac{1-\theta}{\theta}\}$ für $Z \sim F_{2(m-n),2(m+1)}$ $m \in \{0, \ldots, n-1\}$

$T := \frac{1}{n} Y_n$ ist erwartungstreuer Schätzer für $\theta$.

Definiere implizit:

$$\int_{-\infty}^{h_1(\theta)} dP_T = P[T \leq h_1(\theta)] = P[Y_n \leq n h_1(\theta)]$$

$$= P\left[Z \leq \frac{n h_1(\theta)+1}{n - n h_1(\theta)} \frac{1-\theta}{\theta}\right] = \gamma_1$$

$$\Rightarrow F_{2(n-nh_1(\theta)),2(nh_1(\theta)+1);\gamma_1} = \underbrace{\frac{n h_1(\theta)+1}{n-nh_1(\theta)}}_{=: g_1(\theta)} \frac{1-\theta}{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\theta} = \frac{g_1(\theta)}{F_{\ldots;\gamma_1} + g_1(\theta)}$$

Analog:

$$\int_{h_2(t)}^{\infty} dP_T = \ldots = P\left[Z > \frac{n h_2(\theta)+1}{n-nh_2(\theta)} \frac{1-\theta}{\theta}\right] = \gamma_2$$

$$\Rightarrow \bar{\theta} = \frac{g_2(\theta)}{F_{\ldots;\gamma_2} + g_2(\theta)} \quad \text{mit} \quad g_2(\theta) = \frac{n h_2(\theta)+1}{n - n h_2(\theta)}$$

$$F_{\ldots;\gamma_2} = F_{2(n-nh_2(\theta)),2(nh_2(\theta)+1);\gamma_2}$$

3) $X_1,\dots,X_n$ i.i.d; $X_i \sim A_\theta$. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}X_i = \theta$, $\operatorname{Var} X_i = \theta(1-\theta)$

$$\text{ZGWS} \Rightarrow \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}X_i}{\sqrt{\operatorname{Var} X_i}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \;\dot\sim\; N(0,1)$$

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \overbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}}^{Z_n} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,\frac{(\overline{X}_n-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} \le z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,(\overline{X}_n-\theta)^2 \le z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\theta(1-\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,(\overline{X}_n^2 - 2\overline{X}_n\theta + \theta^2) \le z^2(\theta - \theta^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta^2(n+z^2) + \theta(-z^2 - 2n\overline{X}_n) + n\overline{X}_n^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta^2 + \theta\left(-\frac{z^2+2n\overline{X}_n}{n+z^2}\right) + \frac{n\overline{X}_n^2}{n+z^2} \le 0$$

Lösungen der qu. Gleichung:

$$\theta_{1,2} = \frac{z^2+2n\overline{X}_n}{2(n+z^2)} \pm \sqrt{\frac{(z^2+2n\overline{X}_n)^2}{4(n+z^2)^2} - \frac{n\overline{X}_n^2}{n+z^2}} = \frac{z^2+2n\overline{X}_n \pm \sqrt{z^4+4n\overline{X}_n - 4n\overline{X}_n^2 z^2}}{2(n+z^2)}$$

also $Z_n \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \Leftrightarrow \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

nach Gesetz der großen Zahlen gilt $\overline{X}_n \to \mathbb{E}X_i = \theta$ f.s.

daher gilt auch $Y_n := \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - \theta}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}} \;\dot\sim\; N(0,1)$

$$Y_n \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \Leftrightarrow \theta \in \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}/\sqrt{n} + \overline{X}_n,\; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\phantom{x}}/\sqrt{n} + \overline{X}_n\right]$$

4) $n = 100$; $\overline{X}_n = 0{,}55$

Bestimmung von KI für $\Theta$ analog Bsp. 3:

Intervallgrenzen: $$\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} + 200\frac{55}{100} \pm \sqrt{z^4_{1-\frac{\alpha}{2}} + 400\frac{55}{100} - 400\frac{55^2}{100^2} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}{2(100 + z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})}$$

| ÜW $1-\alpha$ | KI |
|---|---|
| 0,95 | [0,4525 ; 0,6439] |
| 0,99 | [0,4228 ; 0,671] |
| 0,9973 | [0,403 ; 0,6889] |

5) A wird mit WS $1-\alpha$ gewählt, wenn gilt: $\frac{1}{2} < \Theta_1$ für ein KI $[\Theta_1, \Theta_2]$ mit ÜW $1-\alpha$.

$$\frac{1}{2} < \Theta_1 \iff n\frac{(\overline{X}_n - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = n(2\overline{X}_n - 1)^2 > z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$\iff n > \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{(2\overline{X}_n - 1)^2}$$

Konkret:

| $1-\alpha$ | kritisches n |
|---|---|
| 0,95 | 385 |
| 0,99 | 664 |
| 0,9973 | 900 |

6) $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim P_\mu \Rightarrow EX_i = \operatorname{Var} X_i = \mu$

ges.: KI für $\mu$ mit (asympt.) ÜW $1-\alpha$.

$$\text{ZGVS} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\mu}}}_{=: Z_n} \sim N(0,1)$$

$$Z_n \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \iff n\frac{(\overline{X}_n - \mu)^2}{\mu} \le z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$\iff n(\overline{X}_n^2 - 2\overline{X}_n\mu + \mu^2) \le z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\mu$$
$$\iff n\mu^2 - (2\overline{X}_n n + z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})\mu + \overline{X}_n^2 n \le 0$$

Lösung der qu. Gl.:

$$\mu_{1,2} = \frac{2\overline{X}_n + z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \pm \sqrt{4\overline{X}_n n z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} + z^4_{1-\frac{\alpha}{2}}}}{2n}$$

$$\Rightarrow Z_n \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \iff \mu \in [\mu_1, \mu_2].$$