

Der Austauschsatz von Steinitz und seine Bedeutung für die Lineare Algebra

Martin Kerndler

Technische Universität Wien

30. März 2009

Endlich erzeugte Vektorräume

- ▶ \exists ein endliches Erzeugendensystem von V
- ▶ $\Rightarrow \exists$ eine endliche Basis

unklar:

Ist *jede* Basis von V endlich?

Übersicht

Vorbemerkungen

Austauschlemma

Austauschsatz von Steinitz

Folgerungen

Austauschlemma

Es seien $(\mathbf{m}_i)_{i \in I}$ eine Basis eines Vektorraumes V , $j \in I$ und

$$\mathbf{a} = \sum_{i \in I} x_i \mathbf{m}_i \text{ mit } x_j \neq 0.$$

Dann ist die Familie $(\tilde{\mathbf{m}}_i)_{i \in I}$ mit $\tilde{\mathbf{m}}_i := \mathbf{m}_i$ für $i \neq j$ und $\tilde{\mathbf{m}}_j := \mathbf{a}$ auch eine Basis von V .

Austauschlemma

Beweis.

$$\begin{aligned} a = \sum_{i \in I} x_i m_i &\Leftrightarrow a = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} x_i \tilde{m}_i + x_j m_j \\ &\Leftrightarrow m_j = \frac{1}{x_j} \left(a - \sum_{i \in I \setminus \{j\}} x_i \tilde{m}_i \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\tilde{m}_i)_{i \in I}$ Erzeugendensystem von V .

$$\left. \begin{array}{l} a = \sum_{i \in I} x_i m_i \text{ eindeutig} \\ x_j \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \notin [(m_i)_{i \in I \setminus \{j\}}] \Rightarrow (\tilde{m}_i)_{i \in I} \text{ l.u.}$$

□

Austauschsatz von Steinitz

Es seien M ein endliches Erzeugendensystem eines Vektorraumes V mit $\#M = s$ und (a_1, a_2, \dots, a_r) eine endliche linear unabhängige Familie in V .

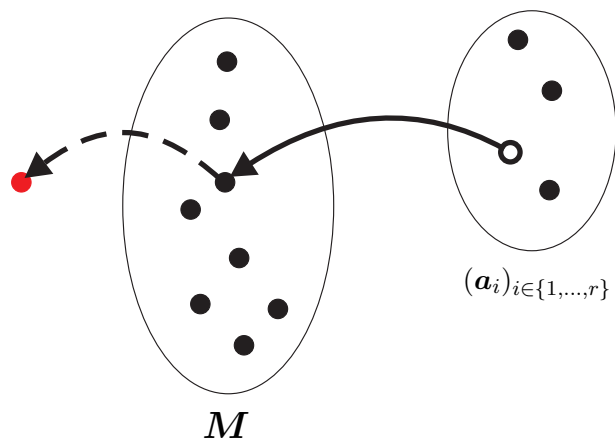
Dann gibt es r verschiedene Elemente $m_1, m_2, \dots, m_r \in M$ so, dass

$$\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cup (M \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_r\})$$

auch ein Erzeugendensystem von V ist. Daher gilt $r \leq s$.

Austauschsatz von Steinitz

Schema:



Folgerung 1

In einem endlich erzeugten Vektorraum

- ▶ hat jede l.u. Familie nur endlich viele Elemente.
- ▶ sind je zwei Basen gleichmächtig.

Folgerung 2

Dimension

Anzahl der Elemente einer Basis von V .

Bezeichnung: $\dim V$

V nicht endlich erzeugt $\Rightarrow \dim V = \infty$

Folgerung 4

Für endlichdimensionale Unterräume U_1, U_2 von V gilt:

- ▶ $U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow \dim U_1 \leq \dim U_2$
- ▶ $U_1 \subsetneq U_2 \Leftrightarrow \dim U_1 < \dim U_2$

Folgerung 3

Sei $n := \dim V < \infty$.

- ▶ l.u. Familie \Rightarrow höchstens n Elemente
- ▶ Erzeugendensystem \Rightarrow mindestens n Elemente
- ▶ Basis \Rightarrow genau n Elemente