

1 Angabe

Man löse das Randwertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \sin t$$

und $x(0) = x(\pi)$, $y(0) = 1$ auf direktem Wege.

2 Vorgangsweise

2.1 Berechnung einer Wronskimatrix $W(t)$

Das charakteristische Polynom lautet $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$ mit den Wurzeln $-1 \pm 3i$. Der Ansatz

$$\mathbf{x} = e^{-t}(\mathbf{u} \cos 3t + \mathbf{v} \sin 3t)$$

für eine reelle Darstellung der Lösung führt auf die Gleichungen (A bezeichne die Systemmatrix):

$$(A + E)\mathbf{u} = 3\mathbf{v}, \quad (A + E)\mathbf{v} = -3\mathbf{u}.$$

Da $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E = (A^2 + 2A + 10E) - 9E = -9E$ wegen der Cayley-Hamilton Gleichung gilt, ergibt sich $(A + E)^{-1} = -\frac{1}{9}(A + E)$, also $\mathbf{x} = e^{-1}(E \cos 3t + \frac{1}{3}(A + E) \sin 3t)\mathbf{u}$, und setzt man der Reihe nach $\mathbf{u} = (1, 0)^T$, bzw. $\mathbf{u} = (0, 1)^T$, so findet als mögliche Wronskimatrix

$$W(t) = e^{-t} \left\{ E \cos 3t + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sin 3t \right\},$$

wobei die in geschweiften Klammern stehende Matrix Determinante 1 hat, und $W(t)$ erfüllt die Randbedingungen

$$W(0) = E = -W(\pi)e^{\pi}.$$

2.2 Ansatzmethode zur Gewinnung einer partikulären Lösung

Der Störterm werde in der Form

$$\mathbf{b}(t) := \mathbf{b}_0 \sin t, \quad \mathbf{b}_0 := \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Der Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{u} \cos t + \mathbf{v} \sin t$ führt nach Einsetzen und Ordnen nach Kosinus- und Sinustermen zu

$$\mathbf{v} = A\mathbf{u}, \quad -\mathbf{u} = A\mathbf{v} + \mathbf{b}_0.$$

Da $A^2 + A + 10 = 0$, ergibt sich durch Einsetzen von \mathbf{v} in die 2.te Gleichung

$$(2A + 9E)\mathbf{u} = b_0,$$

und weil $(2A + 9E)^{-1} = \frac{1}{85}(-2A + 5E)$ ist¹ bekommt man

$$\mathbf{x}_p(t) = \frac{1}{85}(-2A + 5E)\mathbf{b}_0 \cos t + \frac{1}{85}(9A + 20E)\mathbf{b}_0 \sin t,$$

also

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t$$

als partikuläre Lösung und wir vermerken

$$\mathbf{x}_p(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{x}_p(\pi).$$

2.3 Ermitteln der Lösung

Die allgemeine Lösung ist nun von der Form

$$\mathbf{x}(t) = W(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$$

und es ist

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(\pi) = -e^{-\pi}\mathbf{c} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gleichungen für $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ ergeben sich aus den Randbedingungen:

$$0 = x(0) - x(\pi) = c_1(1 + e^{-\pi}) + 4, \quad 1 = y(0) = c_2 + 1,$$

somit

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{1+e^{-\pi}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als Endergebnis die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{1+e^{-\pi}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \cos 3t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \sin 3t \right\} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

¹ Da $A^2 + 2A + 10 = 0$, kann man versuchen, mittels unbestimmtem Ansatz aus $E = (\alpha A + \beta E)(2A + 9E) = 2A^2\alpha + 2A\beta + 9A\alpha + 9\beta E$, wo man A^2 durch $-2A - 10$ ersetzt, α, β auszurechnen – das geht, weil $\mathbf{Q}[x]/(x^2 + 2x - 10)$ ein Körper ist, welcher isomorph zum durch Adjungieren der Matrix A an \mathbf{Q} entstehenden Ring ist – ein wenig Algebra!