

1 Angabe

Man ermittle eine DGL 1.Ordnung (im Sinne der Vorlesung) für die durch $F(x, y, a) := (x - a)^2 + y^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0$ gegebene Kurvenschar, sowie deren Einhüllende. Gibt es Lösungen dieser GLG, die weder der Schar angehören, noch Einhüllende sind?

2 Lösung

Ein Vorschlag zur Vorgangsweise:

1. Es ist nicht schwierig, sich etwas geometrische Anschauung zu verschaffen: Die Kurvenschar besteht aus Kreisen mit Mittelpunkt $(a, 0)$ und Radius $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Jeder solche Kreis besitzt zwei Tangenten vom Nullpunkt aus, welche aus elementargeometrischen Gründen (Skizze und Erkennen von halben Quadrat, gebildet aus Tangentenstück vom Nullpunkt bis $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, von dort Verbindung mit dem Mittelpunkt – der Radius – und Diagonale vom Nullpunkt bis zum Mittelpunkt) unter einem Winkel von $\pm 45^\circ$ vom Nullpunkt ausgehen. Diese Tangenten sollten wohl als Einhüllende auftreten und man erwartet, aus Kreisteilen und Tangententeilen zusammengesetzte Lösungen zu finden, welche die obige Frage mit 'Ja' beantworten lassen.
2. Als Gleichung der Einhüllenden findet man aus $F = F_a = 0$ tatsächlich $y = \pm x$, wobei der Nullpunkt ausgenommen werden muß.
3. Als Differentialgleichung bekommt man nach Eliminieren aus $F(x, y, a) = 0$ und $2(x - a) - 2yy' = 0$

$$2y^2y'^2 + 2y^2 - (x + yy')^2 = 0.$$

4. Nun genügt es, eine Lösung anzugeben, welche weder Scharkurve noch Einhüllende ist (wobei ich zum Aufspüren von einer Skizze ausgegangen bin). Zu diesem Zweck setzen wir

$$f(x) := \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{2 - (x - 2)^2} & 1 < x < 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Überprüfen, daß $y = f(x)$ Lösung der DGL ist (einseitige Ableitungen für $x := 1$ beachten) bitte selbst nachzuvollziehen.

Erfreulich: Die Aufgabenstellung erfordert keineswegs das Aufsuchen der "Allgemeinen Lösung" der DGL.