

1 Modifizierte Angabe

Für das System $t^2\dot{x} = -2y$, $\dot{y} = -x + 1$ ermittle man alle konvergenten Potenzreihenlösungen mit der Anschlußstelle $t = 0$. Für welche Werte (x_0, y_0) gibt es eine solche Lösung des AWP $(x, y)(0) = (x_0, y_0)$?

2 Lösung

Beh 1: Es ist $z(t) := (1, 0)$ eine Polynomlösung mit $z(0) = (1, 0)$. Jede andere Lösung u ist in der Form $u = z + v$ darstellbar, wobei v eine Potenzreihenlösung des homogenen Systems ist. Es kann u lediglich die Anfangswertaufgabe für $u(0) = (1, 0)$ erfüllen.

BW.: Die Lösung z errät man ganz leicht. Auch der Rest der Behauptung ist unmittelbar einsichtig.

Beh 2: Setzt man $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und $z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so ist die homogene Gleichung von der Gestalt

$$(At^2 + Bt)\dot{z} = Cz.$$

BW.: Ist offensichtlich.

Beh 3: Der Ansatz $z := \sum_j z_j t^j$ führt auf die Bedingungen

$$Cz_0 = 0, \quad (j-1)Az_{j-1} + (jB + C)z_j = 0, \quad (j \geq 1).$$

Als einzig mögliche Lösung findet man alle $z_j = 0$. Insbesondere ist somit $z = (1, 0)$ einzige Potenzreihenlösung mit der Anschlußstelle $t = 0$.

BW.: Einsetzen ergibt zunächst

$$\sum_{j \geq 1} jAz_j t^{j+1} + \sum_{j \geq 1} jBz_j t^j + \sum_{j \geq 0} Cz_j t^j.$$

Nun müssen die "Vektorkoeffizienten" der t -Potenzen jeweils Null sein.

Da C invertierbar ist, findet man $z_0 = 0$. Danach, weil

$$(jB + C) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, ergibt sich (im Falle $j = 1$) zunächst $z_1 = 0$, und hieraus (für $j \geq 2$) $z_j = 0$.

Nachbemerkung: In Behauptung 3 wurde gezeigt, daß die einzige *formale* Potenzreihenlösung von der Form $z = (1, 0)$ ist, weil die eine solche bestimmenden Rekursionen keine andere Lösung ergeben.