

## 1 Angabe

Für das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2x + y - xy \cos t\end{aligned}$$

untersuche man, ob es eine Ljapunovfunktion  $V(x, y)$  von Polynomgestalt der Ordnung  $\leq 2$  gibt, die zur Stabilitätsaussage über die Nulllösung geeignet ist.

## 2 Lösung

Die direkte Methode von Ljapunov werde in der folgenden Form verwendet. (Den Nachweis hierfür kann man sehr leicht aus den allgemeinen Kriterien herleiten):

$V(0, 0) = 0$ ,  $V$  ist positiv definit und die Terme des Ausdrucks  $\nabla V \cdot (P, Q)$  bis höchstens 2.ter Ordnung bilden entweder eine positiv oder negativ definite quadratische Form. Wenn ein solches  $V$  gefunden werden kann, ist es Lösung der Aufgabe.

Anm: Wenn nicht, müßte man sich um eine neue Idee umsehen!

**Beh 1:** Falls es ein  $V$  gibt, welches mit seinem Taylorpolynom 2. Ordnung übereinstimmt, und die Lösung als instabil klassifiziert werden soll, so muß es folgende Bedingungen erfüllen:

- $V$  ist eine quadratische Form

$$V(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wobei  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  eine symmetrische  $2 \times 2$ -Matrix ist.

- $a > 0$  und  $ad - b^2 > 0$ .
- $-b > 0$  und  $-2b(b + d) - \frac{1}{4}(a + b - 2d)^2 > 0$ .

BW.: Die erste Bedingung ergibt sich daraus, daß  $V$  keine linearen Terme haben kann. Der nächste Punkt beschreibt die positive Definitheit von  $V$ .

Nun sieht man sich für das System lediglich die linearen Terme an, weil die quadratischen Terme des Systems wegen der Beschränktheit von  $\cos t$  bei  $t \rightarrow \infty$  nach Bilden des inneren Produkts mit  $\nabla V$  im Kriterium lediglich zu Termen 3.ter Ordnung beitragen (bezüglich  $x, y$ ). Damit ergibt sich als Taylorapproximation 2.ter Ordnung für das  $\dot{V}(x, y)$  der Vorlesung der Ausdruck

$$W(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ausmultiplizieren und Anwenden des Hauptminorenkriteriums für die positive Definitheit von  $W$  ergeben die dritte Bedingung.

**Beh 2:** *Die Bedingungen der Beh.2 haben eine Lösung.*

BW.: Offenbar sind die Bedingungen *homogen* in den Variablen  $(a, b, d)$ , d.h., erfüllen  $(a, b, d)$  die Bedingungen, so auch  $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$  für positives  $\lambda$ . Demnach dürfen wir  $b = -1$  annehmen. Danach vereinfachen sich die Bedingungen zu

$$a > 0, \quad ad > 1, \quad 8(d-1) > (a+b-2d)^2$$

und glücklicherweise bedarf es lediglich eines einzigen Lösungstripels. Setzt man  $b = 2d$ , so kommt man zu einer weiteren Vereinfachung und man erkennt durchaus durch "Raten" daß z.B.  $(a, b, d) = (5, -1, 2)$  eine Lösung ist.