

1 Angabe

Bestimmen Sie die “allgemeine Lösung” von

$$2x\ddot{x} = 1 + \dot{x}^2.$$

2 Lösung

Da der Begriff “allgemeine Lösung” (mengentheoretisch) nicht fundiert ist, schlage ich vor, alle maximalen Intervalllösungen zu finden. In diesem Sinn erfolgt die weitere Ausarbeitung.

Beh 1: Sei $x(t)$ eine Intervalllösung. Dann ist $\ddot{x} \neq 0$. Insbesondere kann die DGL in der Form

$$\frac{2\ddot{x}\dot{x}}{1 + \dot{x}^2} - \frac{\dot{x}}{x} = 0$$

geschrieben werden.

BW.: Die rechte Seite ist strikt positiv. Weder x noch \ddot{x} können verschwinden. Daher ist die Umformung statthaft.

Beh 2: Es ist x genau dann eine Intervalllösung, für die \dot{x} nirgends verschwindet, falls es eine positive Konstante c und ein reelles d gibt, sodaß x die Gestalt

$$x(c, d, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{(t+d)^2}{4} + 1 \right)$$

hat, und das Intervall $-d$ nicht enthält.

BW.: Entweder durch unmittelbares Einsehen, oder durch Rechnung erkennt man aus Beh.1

$$\frac{d}{dt} (\ln(1 + \dot{x}^2) - \ln|x|) = 0.$$

Da x Intervalllösung ist, folgt hieraus die Existenz einer Konstanten (in der Form $\ln c$ für positives c), woraus elementare Umformung (bei man tunlichst vermeidet, durch Null zu dividieren!) die DGL

$$\dot{x}^2 - cx + 1 = 0 \tag{*}$$

resultiert. Sichtlich muß $cx - 1 > 0$ gelten (sonst kann \dot{x} nicht existieren). Nun ergibt sich $\epsilon \frac{\dot{x}}{\sqrt{cx-1}} - 1 = 0$, mit $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Hieraus findet man

$$2\epsilon\sqrt{cx-1} = t + d,$$

für eine passende Konstante d und es muß im ganzen Intervall $\text{sign}(t+d) = \epsilon$ gelten. Elementare Umformung führt zunächst auf

$$x = \frac{1}{c} \left(\frac{(t+d)^2}{4} + 1 \right).$$

Dieses x ist Lösung von (*) in jedem Intervall J , für das $-d$ nicht enthält (die Bedingung $cx - 1 > 0$ ist dann auch erfüllt!).

Beh 3: Zu jeder maximalen Intervalllösung x gibt es Konstanten $c > 0$ und d mit

$$x = \frac{1}{c} \left(\frac{(t+d)^2}{4} + 1 \right).$$

Jede solche Lösung ist für $t \in \mathbb{R}$ definiert.

BW.: Zunächst prüft man ganz leicht, daß jede Lösung der angegebenen Art die Originalgleichung löst, also maximale Intervalllösung ist. Weitere Lösungen könnten höchstens dann entstehen, wenn man Lösungen durch "Verkleben" von $x(c, d, t)$ mit $x(c', d', t)$ für einen Wert $t = t_0$ schafft, also $x(c, d, t_0) = x(c', d', t_0)$ gilt. Dann müsste wegen der zweimaligen Differenzierbarkeit die selbe Gleichung für jeweils \dot{x} und \ddot{x} an der Stelle t_0 gelten, woraus sehr schnell folgt, daß $c = c'$ und $d = d'$ zu gelten hat.

Etwas irritiert mag man sein, wohin z.B. die Bedingung über ϵ hingekommen ist. Sie war lediglich beim Auffinden der Lösung von Bedeutung. Inzwischen haben wir jedoch die Gültigkeit der Lösung geprüft (ohne solche Einschränkungen).