

1 Angabe

Für das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + xy \\ \dot{y} &= -1 + y + xy\end{aligned}$$

sollen die stationären Punkte (= Gleichgewichtslagen = zeitlich konstante Lösungen) bestimmt werden. Für jeden gefundenen stationären Punkt $P(x_0, y_0)$ transformiere man das System mittels $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$ auf "lokale Koordinaten". Welche Funktion der Bauart $V(u, v) = u^2 \pm v^2$ läßt sich als Ljapunovfunktion zur Ermittlung der Stabilität der jeweiligen stationären Lösung verwenden?

2 Lösung

Beh 1: Die Funktion $V_-(u, v) := u^2 - v^2$ ist als Kandidat für eine Ljapunovfunktion ungeeignet.

BW: V_- ist nicht positiv definit.

Beh 2: Als stationäre Punkte ergeben sich $P_1(0, 1)$ und $P_2(-2, -1)$. Die linearisierten Systeme lauten

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 2u + uv & \text{und} & & \dot{u} &= -2v + uv \\ \dot{v} &= u + v + uv & & & \dot{v} &= -u - v + uv\end{aligned}$$

Zunächst findet man die stationären Punkte, indem wegen $0 = \dot{x} = x(1 + y) = \dot{y} = -1 + y(1 + x)$ löst. Danach wendet man die Transformation $x = 0 + u$, $y = 1 + v$ an, findet $\dot{x} = \dot{u}$, sowie $\dot{y} = \dot{v}$ und die entsprechenden Terme auf der rechten Seite durch Einsetzen der Transformation in die rechte Seite des Ausgangssystems. Analog für P_2 .

Beh 3: $V(x, y) := u^2 + v^2$ ist als Ljapunovfunktion an P_1 geeignet: Die Lösung $(x(t), y(t)) = P_1$ ist instabil.

BW.: Zunächst ist V positiv definit. Danach prüft man

$$\frac{d}{dt}V(u(t), v(t)) = \nabla V(u(t), v(t)) \cdot (\dot{u}(t), \dot{v}(t))$$

auf Vorzeichen unter der Annahme, daß $(u(t), v(t))$ Lösungskurve nahe an $(0, 0)$ ist. Einsetzen des Ausdruckes aus dem transformierten System (linkes System) liefert den Ausdruck (wobei ich mich der Notation der Vorlesung für den obigen Ausdruck anschließe):

$$\dot{V}(u, v) = 2u^2 + uv + v^2 + u^2v + uv^2.$$

Um nachzuweisen, daß die Nulllösung instabil ist, genügt es, die Funktion $W(u, v) := 2u^2 + uv + v^2 + u^2v + uv^2$ (die gleiche wie \tilde{V} , aber als Funktion in den Variablen u, v gesehen), auf positive Definitheit zu testen. D.h., es reicht, nachzuweisen, daß W an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum hat. Hiefür wiederum ist hinreichend, daß die Terme 2.ter Ordnung (welche das Taylorpolynom von W bis Glieder 2.ter Ordnung mit Anschlußstelle $(0, 0)$ beschreiben), eine positiv definite quadratische Form darstellen. Das wiederum läßt sich mit dem Hauptminorenkriterium unschwer bejahen.

Beh 4: *Die Funktion $V(u, v) := u^2 + v^2$ ist an der Stelle P_2 als Ljapunovfunktion zur Stabilitätsentscheidung ungeeignet.*

BW.: Ähnlich wie vorher findet man

$$W(u, v) = -uv - v^2 + u^2v + uv^2 = (u + v)(-1 + u)v.$$

ist für $u = 0$ und $v \neq 0$ negativ und entlang der Geraden $u = -2v$ für hinreichend kleines $u \neq 0$ positiv, also indefinit (die gleiche Aussage erhält man durch Analyse von Q und dem Vermerk, daß bei Nichtausgeartetheit von Q man von Q pos/neg/indefinit man auf die gleiche Aussage für W schließen kann.) Wegen der Indefinitheit ist W zur Stabilitätsaussage nicht heranziehbar.