

## 1 Angabe

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berechne man eine reelle Lösungsbasis des Systems  $\dot{x} = Ax$ .

## 2 Lösung

Man kann wie folgt vorgehen:

1. Aus Bspl. 153 weiß man die Eigenwerte von  $A$ , nämlich 3, und  $2(1 \pm i)$ . Deshalb führt der *Ansatz*  $x = e^{\lambda t}v$  mit unbekanntem  $v$  geradewegs auf das Eigenwertproblem

$$Av = \lambda v,$$

mit bekannten Werten  $\lambda$  und man berechnet für jeden Eigenwert  $\lambda$  einen Eigenvektor.

2. Als Eigenvektor zu  $\lambda = 3$  findet man sofort

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Einen Eigenvektor zu  $\lambda = 2(1 + i)$  findet man z.B. so: Die Systemmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} -2i & 13 & 1 \\ -1 & 3 - 2i & 1 \\ 3 & 0 & -2 - 2i \end{pmatrix}.$$

Da man weiß, daß der Rang gleich 2 sein muß und  $v$  orthogonal zu den ersten beiden Zeilen ist, ergibt sich

$$v = \begin{pmatrix} -2i \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 - 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 10 + 2i \\ -1 + 2i \\ 9 - 6i \end{pmatrix}$$

als Lösung, wie man (im nachhinein) leicht überprüfen kann.

4. Wer fleißig sein will, berechnet noch den Eigenvektor zu  $2(1 - i)$ , nämlich (als Ergebnis)

$$v = \begin{pmatrix} 10 - 2i \\ -1 - 2i \\ 9 + 6i \end{pmatrix}$$

der, wie nicht überrascht, konjugiert komplex zum Eigenvektor unter 3. ist.

Wie angedeutet, er wird nicht gebraucht, wie wir gleich sehen werden!

5. Nun geht man von den Vektoren

$$\phi_1 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$z = e^{2t}(\cos(2t) + i \sin(2t)) \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + 2i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

aus und berechnet Real- und Imaginärteil, um

$$\phi_2 = e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \cos(2t) - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \sin(2t) \right\}$$

und

$$\phi_3 = e^{2t} \left\{ 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \sin(2t) \right\}$$

zu finden.

Es sind nun sichtlich alle  $\phi_i$  Lösungen des Systems, weil die Matrix  $A$  reell ist, sodaß sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von  $z$  Lösung des Systems sein müssen!

6. Die allgemeine Theorie zeigt, daß es sich auf ganz  $\mathbb{R}$  um ein Fundamentalsystem handelt. Wir wollen das jedoch unmittelbar einsehen und die Wronskimatrix berechnen. Es ist

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \sin(2t) \\ 0 & -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

sodaß die Wronskimatrix für alle  $t \in \mathbb{R}$  regulär ist (als Produkt regulärer Matrizen).