

1 Angabe

Man löse das Randwertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \sin t$$

und $x(0) = x(\pi)$, $y(0) = 1$ unter Verwendung der Greenmatrix.

2 Vorgangsweise

2.1 Berechnung einer Wronskimatrix $W(t)$ und ihrer Inversen

Man findet (siehe Bspl. 205) als mögliche Wronskimatrix, die Abkürzung

$$B := \frac{1}{3}(A + E) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sin 3t$$

verwendend,

$$W(t) = e^{-t} \{E \cos 3t + B \sin 3t\},$$

wobei die in geschweiften Klammern stehende Matrix Determinante 1 hat, und $W(t)$ erfüllt die Randbedingungen

$$W(0) = E = -W(\pi)e^{\pi}.$$

Wir vermerken die Identität

$$B^2 = -E$$

und die daraus folgende Darstellung:

$$W(t)^{-1} = e^t \{E \cos 3t - B \sin 3t\}.$$

2.2 Berechnung von $G(t, u)$ und Integraldarstellung der Lösung

Aus der Formel

$$G(t, u) = W(t) [z(t, u)E - R(W)^{-1}DW(\pi)] W(u)^{-1}$$

entsteht unter der Verwendung der Abkürzungen,

$$\sigma := \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}, \quad z := z(t, u), \quad E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

der Formeln für W und W^{-1} unter Beachtung von $B^2 = -E$

$$\begin{aligned}
G(t, u) &= e^{-t+u} (\cos 3tE + B \sin 3t)(zE - \sigma E_{11})(\cos 3uE - B \sin 3u) \\
&= e^{-t+u} (\cos 3t \cos 3u(zE - \sigma E_{11}) \\
&\quad - \cos 3t \sin 3u(zB - \sigma E_{11}B) \\
&\quad + \sin 3t \cos 3u(zB - \sigma BE_{11}) \\
&\quad + \sin 3t \sin 3u(zE + \sigma BE_{11}B))
\end{aligned} \tag{1}$$

Man findet

$$E_{11}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BE_{11}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Definiert man $J_c(t) := \int_0^t \cos 3u \sin u \, du$ und $J_s(t) := \int_0^t \sin 3u \sin u \, du$, sowie $C(t) := e^{-t} \cos 3t$ und $S(t) := e^{-t} \sin 3t$ so ergibt sich nach Zusammenfassen von Gliedern mit z , bzw. σ

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi G(t, u) \mathbf{b}(u) \, du &= [(C(t)J_c(t) + S(t)J_s(t)) \\
&\quad + (-C(t)J_s(t) + S(t)J_c(t))B] \mathbf{b}_0 \tag{2} \\
&+ \sigma [C(t)(-J_c(\pi)E_{11} + J_s(\pi)B) \\
&\quad + S(t)(-J_c(\pi)BE_{11} + J_s(\pi)BE_{11}B)] \mathbf{b}_0. \tag{3}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung hat dann unter Beachtung von

$$R(W)^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (-e^\pi E) \right\}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\pi} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{c} = (0, 1)^T$ die Integraldarstellung

$$\phi(t) = \int_0^t G(t, u) \, du + W(t)R(W)^{-1}\mathbf{c}$$

und man findet sehr leicht

$$W(t)R(W)^{-1}\mathbf{c} = e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 3t \right].$$

2.3 Berechnung der Integrale

Um nun das Resultat mit 205 vergleichen zu können, erwartet man nach dem Auswerten mit vektorwertigen Koeffizienten behaftete Winkelfunktionen mit den Argumenten $3t$ oder t . Deshalb erhofft man Vereinfachungen durch Benützen der komplexen Darstellung von Winkelfunktionen, um Kürzungen früher zu erkennen:

$$\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}, \quad \sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

Es ergeben sich für J_c und J_s die Darstellung

$$\begin{aligned}(J_c + iJ_s)(t) &= \int_0^t e^{(1+3i)u} \frac{1}{2i} (e^{iu} - e^{-iu}) du \\ &= \int_0^t \frac{1}{2i} (e^{(1+4i)u} - e^{(1+2i)u}) du \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{(1+4i)t}}{1+4i} - \frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i} \right)\end{aligned}$$

Es ist für die Auswertung von Eq.(3) nützlich,

$$(J_c + iJ_s)(\pi) = \frac{e^\pi}{85}(-7 + 6i) \quad (4)$$

zu vermerken. Nun erkennt man in Glg.(2) das Auftreten von Real- und Imaginärteil des Produkts

$$(C + iS)(J_c - iJ_s) = CJ_c + SJ_s - i(cJ_s - sJ_c).$$

Kurze Rechnung ergibt

$$(C(t) + iS(t))(J_c(t) - iJ_s(t)) = \frac{1}{85} [(7 \cos t + 11 \sin t) + i(-6 \cos t + 27 \sin t)]. \quad (5)$$

2.4 Endergebnis

Das Zusammenfassen der Teilergebnisse führt auf das in 205 gefundene Ergebnis:

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{1 + e^{-\pi}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \cos 3t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \sin 3t \right\} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

3 Nachbemerken

Rechenaufwand, vorallem "Formelmanipulation" ist bei solchen Aufgaben kaum vermeidbar. Im vorliegenden Beispiel hoffe ich nahelegen zu können, daß der Umweg über die komplexe Darstellung und Benützung von linearer Algebra angetan sein können, vor unüberschaubarem (weil wenig strukturiertem) Output symbolischer Algebrapakete bewahrt zu bleiben.