

## 1 Angabe

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und

$$b(t) := v_1 e^t \cos t + v_2 e^t \sin t + v_3 e^t,$$

so bestimme man unter Zuhilfenahme der Resultate aus Bspl. 155 (d.i., mit den Bezeichnungen

$$S = \begin{pmatrix} 13 & 11+i & 11-i \\ 4 & -6+5i & -6-5i \\ -8 & -11-i & -11+i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

ist  $W = Se^{Jt}$  eine Wronskimatrix, m.a.W. die Spalten bilden für alle  $t \in \mathbb{R}$  ein System von Fundamentallösungen des homogenen Systems  $\dot{x} = Ax$ .) mittels Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung von  $\dot{x} = Ax + b$ .

## 2 Lösung

Das Hauptproblem bei dieser Aufgabe ist nicht das Auswerten diverser Integrale oder die Matrix-Vektormultiplikationen, sondern liegt darin, daß die gleichen Integrale durch Linearkombinieren in Vielzahl auftreten. Deshalb empfiehlt es sich im Rückgriff auf Lineare Algebra folgende Regeln (hier nur für  $3 \times 3$ -Matrizen und Vektoren formuliert) in Erinnerung zu rufen und entsprechend anzuwenden.

1.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \phi_1 + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} \phi_2 + \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix} \phi_3$$

M.a.W.,  $A\phi$  ist die Linearkombination der Spalten der Matrix mit den entsprechenden Komponenten des Vektors als Koeffizienten.

2.

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

Diese Regel ist brauchbar, wenn z.B.  $\phi$  Einträge Funktionen in  $t$  und  $v$  lediglich Skalare hat und man  $v$  und  $\phi$  "vertauschen" möchte.

3. Wir werden den Operator  $\text{diag}$  und seinen Inversen  $\text{diag}^{-1}$  benützen:

$$\text{diag}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix}, \quad \text{diag}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

**Beh 1:** Es seien die  $v_i$  die gemäß der Angabe im Störterm auftretenden Vektoren, es bezeichne  $\tilde{v}_i := S^{-1}v_i$ , und es seien

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= \text{diag}^{-1}(e^{-Jt}e^t \cos t) = \text{diag}(e^{-2t}, e^{-it}, e^{it}) \cos t, \\ \phi_2 &:= \text{diag}^{-1}(e^{-Jt}e^t \sin t) = \text{diag}(e^{-2t}, e^{-it}, e^{it}) \sin t, \\ \phi_3 &:= \text{diag}^{-1}(e^{-Jt}e^t) = \text{diag}(e^{-2t}, e^{-it}, e^{it}). \end{aligned}$$

Variation der Konstanten  $c$  ergibt das System

$$\begin{aligned} \dot{c} &= e^{-Jt}e^t \cos t \tilde{v}_1 + e^{-Jt}e^t \sin t \tilde{v}_2 + e^{-Jt}e^t \tilde{v}_3 \\ &= \text{diag}(\tilde{v}_1)\phi_1 + \text{diag}(\tilde{v}_2)\phi_2 + \text{diag}(\tilde{v}_3)\phi_3. \end{aligned}$$

Sind  $\Phi_i$  Stammfunktionsvektoren der 3-er Vektoren  $\phi_i$ , so ist

$$x_p = S \text{diag}(\tilde{v}_1)\Phi_1 + S \text{diag}(\tilde{v}_2)\Phi_2 + S \text{diag}(\tilde{v}_3)\Phi_3$$

eine partikuläre Lösung.

BW.: Die Form der allgemeinen Lösung ergibt sich aus der Theorie. Ist  $c$  nun variabel (von  $t$  abhängig), so ergibt Einsetzen in das System und Umformung das DGL-System für  $c$ . Danach beherzigt man die Regeln aus der Linearen Algebra.

Wie man erkennt, hat man nun das Lösen der Aufgabe auf Matrizenmultiplikationen von Matrizen mit skalaren Einträgen und Berechnen von 9 Stammfunktionen zurückgeführt.

**Beh 2:** Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}}{5}(-2 \cos t + \sin t) \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \cos 2t \\ -\frac{1}{4} \cos 2t \end{pmatrix}, \\ \Phi_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2t}}{5}(\cos t + 2 \sin t) \\ -\frac{1}{4} \cos 2t \\ -\frac{1}{4} \cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \end{pmatrix}, \\ \Phi_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2t}}{2} \\ \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

BW.: Es treten Stammfunktionen  $F, G, H$  von Funktionen

$$f = e^{\mu t} \cos t, \quad g = e^{\mu t} \sin t, \quad h = e^{\mu t},$$

mit  $\mu \in \{-2, \pm i\}$  auf. Man findet ohne große Mühe als Stammfunktionen für  $\mu = -2$  als Stammfunktionen  $F, G, H$  der Reihe nach:

$$\frac{e^{-2t}}{5}(-2 \cos t + \sin t), \quad -\frac{e^{-2t}}{5}(\cos t + 2 \sin t), \quad -\frac{e^{-2t}}{2}.$$

Elementares Integrieren (die Halbwinkelsätze  $\cos 2t = 2 \cos^2 t + 1$  und  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$  benützend) ergibt als Kandidaten für Stammfunktionen (Integrationskonstante wird nicht benötigt!)

$$\int e^{i\epsilon t} \cos t \, dt = \dots = \frac{t}{2} - \frac{i\epsilon}{4} e^{2i\epsilon t}.$$

und

$$\int e^{i\epsilon t} \sin t \, dt = \dots = i\epsilon \frac{t}{2} - \frac{1}{4} e^{2i\epsilon t}.$$

Danach ordnet man die Ergebnisse entsprechend, um die Vektoren  $\Phi_i$  damit zu bestücken.

**Beh 3:** Es bezeichne  $V := (v_1, v_2, v_3)$  mit Spaltenvektoren die  $v_i$  der Angabe und  $\tilde{V} := S^{-1}V$  eine Matrix mit Spalten  $\tilde{v}_i$ . Dann ist

$$\tilde{V} = \frac{1}{610} \begin{pmatrix} 244 & 0 & 0 \\ -102 + 159i & 25 - 30i & -5 - 55i \\ -102 - 159i & 25 + 30i & -5 + 55i \end{pmatrix}$$

BW.: Die elementare Rechnung ist händisch durchaus bewältigbar, im Anhang finden sich einige Maplezeilen.

**Beh 4:** Es seien  $\tilde{V}_i := S \text{diag}(\tilde{v}_i)$  mit  $\tilde{v}_i$  aus Beh.3. Dann ist

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 52 & -21 & -21 \\ 16 & -3 & -3 \\ -32 & 21 & 21 \end{pmatrix} + \frac{i}{10} \begin{pmatrix} 0 & 27 & 27 \\ 0 & 24 & 24 \\ 0 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

BW.: Die Berechnungen wurden mit dem im Anhang beigefügten Mapleprogramm ausgeführt, sind jedoch händisch ohne weiteres bewältigbar, weil man eine Matrix von rechts mit einer Diagonalmatrix multipliziert, indem man die  $i$ .te Spalte mit dem  $i$ .ten Element der Diagonalmatrix multipliziert, um die  $i$ .te Spalte des Produkts zu erhalten.

Da der Störterm reell ist, erwartet man eine reelle partikuläre Lösung. Hierzu nimmt man z.B. den Realteil der ermittelten Lösung  $x_p$ . Beim Auffinden desselben benützt man das Zerlegen der Matrizen und Vektoren in Real- und Imaginärteil sowie die einfache Multiplikationsregel

$$(A + iB)(u + iv) = Au - Bv + (Bu + Av)i$$

aus der für komplexe Matrix  $\tilde{V}$  und Vektor  $\Phi$

$$\Re(\tilde{V}\Phi) = \Re(\tilde{V})\Im(\Phi) - \Im(\tilde{V})\Re(\Phi)$$

abzulesen ist.

### 3 Ergebnis

$$x_p = \frac{e^{-2t}}{50} \begin{pmatrix} 52 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -19 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\cos 2t}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\sin 2t}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### A Mapleprogrammzeilen

Dies ist eine Kopie der Datei 'bspl181', die unter einem Linuxterminal mit dem Aufruf 'maple<bspl181' an maple übergeben wurde. Das am Bildschirm abgelesene Ergebnis wurde händisch in die Latexdatei übertragen.

```
with(LinearAlgebra):

# Prüfen der händisch berechneten Matrix S der Eigenvektoren

A:=<<3,4,0>|<2,0,-2>|<1,5,2>>;      # A aus der Angabe
J:=<<3,0,0>|<0,1+I,0>|<0,0,1-I>>;    # Jordannormalform
S:=<<13,4,-8>|<11+I,-6+5*I,-11-I>|<11-I,-6-5*I,-11+I>>;

A.S-J.S;                               # hier sollte Null kommen!

SI:=MatrixInverse(S);                  # Aufstellen der Inversen von S
V:=<<1,1,1>|<1,0,-1>|<0,1,0>>;        # Die Vektoren v_i als Spalten
tildeV:=SI.V;                          # Rechnung für Beh. 3
```

```

with(linalg):

colstildeV:=col(tildeV,1..3);      # Spalten von tildeV als Array

# Zu Beh.4: Berechnen von tilde  $V_i = S \operatorname{diag}(\operatorname{tilde} v_i)$   $i=1 \dots 3$ 

for i from 1 to 3 do
    tv:=colstildeV[i]:
    Delta:=matrix(3,3,[tv[1],0,0,0,tv[2],0,0,0,tv[3]]):
    multiply(S,Delta);
end do;

quit;

```