

## 1 Angabe

Es sei eine DGL. 2.Ordnung  $\ddot{x} + g(x) = 0$  mit in einer Umgebung von 0 stetigen Funktion  $g$  gegeben. Unter welchen Bedingungen an  $g$  erweist sich ein erstes Integral als Ljapunovfunktion, sodaß sich mit ihrer Hilfe die Nulllösung des zugeordneten Systems 1.Ordnung als stabil nachweisen läßt?

## 2 Lösung

Das zugeordnete System 1.Ordnung ist  $\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x)$ . Da das System autonom ist, kann eine Ljapunovfunktion  $V = V(x, y)$  verwendet werden, und es sind folgende Kriterien zu erfüllen

- $V(0, 0) = 0$ ;
- $\nabla V(y, -g(x)) \leq 0$  für hinreichend kleines  $x$ .

(Dies kann aus der allgemeineren Form des Kriteriums eingesehen werden, oder unmittelbar aus der geometrischen Deutung!).

**Beh 1:** Die Gleichung besitzt ein erstes Integral der Form  $F(x, y) = \int_0^x g(u) du + \frac{y^2}{2}$ .

BW.: Um an ein 1.tes Integral zu gelangen, betrachtet man die aus dem System herleitbare Differentialgleichung

$$0 = g(x) dx + y dy$$

(die man im 17.ten Jahrhundert so bekam, daß man von  $\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x)$  ausging, formal die zweite Gleichung durch die 1.te dividiert, also  $\dot{y}/\dot{x} = -g(x)/y$  bekam, und jetzt  $\dot{y}/\dot{x}$  durch  $dy/dx$  ersetzte und den Ausdruck nennerfrei machte – formal funktionieren tut das auch heutzutage noch!)

Nun gewinnt man das erste Integral (welches zugleich Potentialfunktion des Normalenfeldes  $(g(x), y)$  des Feldes der DGL-rechten Seite) ist, durch Integration entlang eines z.B. Hakenweges

$$F(x, y) = \int_0^x g(u) du + \int_0^y \eta d\eta.$$

**Beh 2:** Damit  $V = F$  zur Entscheidung für die Stabilität der Nulllösung genommen werden kann, ist es notwendig, daß  $\int_0^x g(u) du > 0$  für alle  $x > 0$  gilt. Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn  $\text{sign}(g(x)) = \text{sign}(x) \neq 0$  für alle  $x \neq 0$  nahe bei Null gilt.

BW.: Sichtlich hat unter diesen Bedingungen  $G(x) := \int_0^x g(u) du$  ein lokales striktes Minimum für  $x = 0$ , und das trifft dann auch für  $F(x, y)$  an

$(0, 0)$ . Deshalb sind die Trajektorien in der Nähe der Null geschlossene Linien (von der Form  $F(x, y) = \epsilon$  für kleines  $\epsilon > 0$ ) und somit ist Ljapunovstabilität gegeben. Die hinreichende Bedingung ist evident.

**Beh 3:** Für gerades  $n \geq 0$  erfüllt  $g(x) = x^n \sin x$  die Bedingung, für ungerades  $n > 0$  nicht.

BW.: Für gerades  $n$  ist  $g$  ungerade Funktion, also stimmt ihr Vorzeichen mit jenem von  $x$  überein.

Nun sei  $n$  ungerade. Dann hat zwar  $G(x)$  an Null eine verschwindende Ableitung, jedoch beginnt die Taylorreihenentwicklung von  $G(x)$  mit dem Term  $x^{n+1}$ . Dieser Term ist für negatives  $x$  negativ, also auch  $G(x)$ . Somit kann  $F(x, y)$  kein lokales Minimum an  $(0, 0)$  besitzen.