

1 Angabe

Zur Kurvenschar $x^2 - y^2 + 2x + a(y - 1) = 0$ ermittle man eine orthogonale Kurvenschar.

2 Lösung

Die Vorgangsweise der Vorlesung ist in etwa wie folgt:

1. Zunächst verschafft man sich eine DGL für die gegebene Kurvenschar, indem man ausgehend von:

$$\begin{array}{rclcl} x^2 - y^2 + 2x & + & a(y - 1) & = & 0 \\ 2x - 2yy' + 2 & + & ay' & = & 0 \end{array}$$

bemerkt, daß dies ein lineares homogenes Gleichungssystem für $(1, a)$ ist mit nichttrivialer Lösung. Somit verschwindet die Determinante, d.h.

$$(x^2 + y^2 + 2x - 2y)y' - 2(xy - x + y - 1) = 0.$$

2. Nun führt die Substitution $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$ und Umformung auf die exakte DGL

$$0 = (x^2 + y^2 + 2x - 2y) dx + 2(xy - x + y - 1) dy,$$

und Integration über den Hakenweg von $(0, 0)$ nach $(x, 0)$ und danach von dort nach (x, y) ergibt

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta \\ &= \int_0^x (\xi^2 + 2\xi) d\xi + 2 \int_0^y (x\eta - x + \eta - 1) d\eta \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + xy^2 - 2xy + y^2 - 2y \end{aligned}$$

als erstes Integral. Schließlich sind die durch Gleichungen der Form

$$F(x, y) - b = 0$$

beschriebene Kurven Kandidaten für orthogonale Kurvenscharen.

3. Nun sollen die Kriterien geprüft werden.

- (a) Checken, in welchen Punkten (x, y, a) die Gleichung $G(x, y, a) := x^2 - y^2 + 2x + a(y - 1) = 0$ eine Kurve mit wohldefiniertem Orthogonalvektor ∇G (Differentiation nach (x, y)) hat.
 Man findet als Ausnahmen lediglich Punkte der Form $(x, y) = (-1, \frac{a_0}{2})$ mit $a_0 = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
- (b) Checken, in welchen Punkten (x, y, b) die Gleichung $F(x, y, b) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + xy^2 - 2xy + y^2 - 2y - b = 0$ eine Kurve mit wohldefiniertem Orthogonalvektor ∇F (Differentiation nach (x, y)) hat.
 Man findet als Ausnahmen lediglich Punkte der Form $(x, y) = (\frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{2}), \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{2}))$ mit $\gamma := \pm\sqrt{2\sqrt{2}}$ und b ist hiedurch eindeutig festgelegt. (Differentiation nach (x, y)) hat.
- (c) Bleibt man von den Ausnahmen in (a) und (b) fern und legt jeweils a und b derart fest, daß die Kurven $G(x, y, a) = 0$ und $F(x, y) - b = 0$ einander in $P(x, y) = 0$ schneiden, so findet man die Orthogonalitätsbedingung $\langle \nabla G, \nabla F \rangle = 0$ erfüllt.