

1 Angabe

Suchen Sie zunächst eine Lösung in Polynomgestalt und danach suche man die "allgemeine Lösung" für $t^3 \dot{x} = x^2 + t^4$.

2 Lösung

Da der Begriff "allgemeine Lösung" nicht fundiert ist (im Sinne der Mengenlehre), erscheint es mir sinnvoll, nach allen maximalen Intervalllösungen zu fragen. In diesem Sinne erfolgt die Ausarbeitung.

Beh 1: *Es ist $x = t^2$ einzig mögliche Polynomlösung. Jede Intervalllösung ist von der Form $x = t^2 + r$ mit $t^3 \dot{r} = 2t^2 r + r^2$.*

BW.: Man setzt $x = at^n + r$ mit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (der noch unbekannte Grad des Polynoms, sofern $a \neq 0$) und r Terme von niedrigerer als der Ordnung n . Einsetzen in die DGL liefert

$$nat^{n+2} + t^3 \dot{r} = a^2 t^{2n} + 2at^n r + r^2 + t^4.$$

Unter der Annahme $a \neq 0$ ist auf der linken Seite nat^{n+2} der Term höchster Ordnung und rechts ist es $a^2 t^{2n}$ falls $n > 1$ sein sollte. Die Annahme $n = 0$, bzw. $n = 1$ führen rasch auf einen Widerspruch. Somit ist $n = 2$ einzig mögliche Wahl und durch Koeffizientenvergleich vom Term höchster Ordnung, t^4 , ergibt sich $2a = a^2 + 1$, also $a = 1$ als einzige Lösung. Es verbleibt, ein in t lineares r mit

$$t^3 \dot{r} = 2t^2 r + r^2$$

zu suchen. Der Ansatz $r = \alpha t + \beta$ führt auf $r = 0$ als einzige Möglichkeit. Somit ist t^2 die einzige Lösung, und es reicht, im Folgenden die DGL für r zu betrachten.

Beh 2: *Durch jeden Punkt der linken (rechten) Halbebene verläuft genau eine maximale Intervalllösung, in dem Sinne, daß sie die HE nicht verlassen darf.*

BW.: Aus dem Existenz und Eindeutigkeitssatz (letzte Seite des 1. Kapitels!) folgt die Richtigkeit dieser Aussage. Da wegen der Division durch t^3 die zugehörige Funktion $f(t, x)$ bei Null singularär wird, ist die Teilung in linke und rechte Halbebene ($t < 0$ bzw. $t > 0$) erforderlich.

Beh 3: *Für jede Intervalllösung r mit $r \neq 0$ in diesem Intervall erfüllt $z := r^{-1}$ die DGL $t^3 \dot{z} + 2t^2 z + 1 = 0$. Jede Intervalllösung z dieser DGL kann in der Form $z = \frac{-\ln|t|+c}{t^2}$ dargestellt werden.*

Es hat r eine Darstellung der Form $r(c, t) := \frac{t^2}{c - \ln|t|}$. Als mögliche maximale Intervalle ergeben sich $J \in \{(-\infty, -e^c), (-e^c, 0), (0, e^c), (e^c, \infty)\}$. Falls im Sinne eines einseitigen GW $r(t_0) = 0$ existiert, so ist $t_0 = 0$.

BW.: Zunächst erkennt man in der DGL für x die Form einer Ricattidgl., sodaß der Ansatz $z = \frac{1}{r}$ naheliegt. Er bedingt das Nichtverschwinden der Intervalllösung auf dem entsprechenden Intervall. Danach Einsetzen von $z := r^{-1}$ in die DGL führt auf die lineare DGL 1. Ordnung

$$t^3 \dot{z} + 2t^z + 1.$$

Jede Lösung der homogenen Gleichung hat die Gestalt $z_h(t) = \frac{c}{t^2}$ für eine passende Konstante C . Variation der Konstanten (oder Raten) führen auf die spezielle Lösung $z_p(t) = -\frac{\ln|t|}{t^2}$, sodaß jede Intervalllösung die Gestalt $z = \frac{c - \ln|t|}{t^2}$ haben muß. Demnach ist $r = \frac{1}{z}$ und hieraus ergeben sich die genannten Möglichkeiten eines maximalen Definitionsbereiches so einer Intervalllösung. Die letzte Aussage ist offensichtlich (De L'Hospital!).

3 Zusammenfassung

Es sei $x(c, t) := r(c, t) + t^2$. Sind $x(c, t)$ und $x(c', t)$ auf einem der in Beh.3 beschriebenen Intervallen mit Null als Häufungspunkt gegeben und $\text{sign}(c') \neq \text{sign}(c)$ so findet man eine maximale Intervalllösung indem man an Null durch Null stetig ergänzt. Alle anderen maximalen Intervalllösungen sind von der Form $x(c, t)$ mit einem Intervall aus Beh.3. als Definitionsbereich, welches Null nicht als Häufungspunkt hat.

Elementare Kurvendiskussion der Lösungen ergibt folgendes Bild der Funktionen $x(c, t)$:

- Lösungen gehen durch Spiegelung an der (vertikalen) x -Achse in Lösungen über.
- Die Lösung $x(0, t)$ sieht einer Parabel der Form $x = t^2$ recht ähnlich und berührt den Nullpunkt mit waagrechter Tangente.
- Jedes andere $x(c, t)$ in der rechten HE hat eine vertikale Asymptote und startet bei $t = 0$ mit waarechter Tangente, bleibt oberhalb von $x(0, t)$ und schmiegt sich nach rechts oben an die Asymptote, die durch $t = e^c$ gegeben ist. Rechts von dieser Asymptote kommt $x(c, t)$ von unten, ist streng monoton und schmiegt sich schliesslich an $x(0, t)$ an (d.h. $x(0, t) - x(c, t) \rightarrow 0$ bei $t \rightarrow \infty$).