

1 Angabe

Man löse das Anfangswertproblem $t\dot{x} - 4x = t\sqrt{x}$ und $x(1) = 0$ bzw. $x(1) = 3$.

2 Lösung

Beh 1: Durch jeden Punkt (t_0, x_0) mit $x_0 > 0$ gibt es genau eine maximale Intervalllösung ϕ mit $\phi(t_0) = x_0$, die ganz in der oberen Halbebene $x > 0$ liegt.

BW.: Dies folgt aus der Differenzierbarkeit der Funktion $f(t, x) := \sqrt{x} - 4\frac{x}{t}$, welche der (umgeformten) DGL zugehört.

Beh 2: Ist $t \mapsto x(t)$ eine Intervalllösung, die für $t > 0$ auf einem Intervall selbst positiv ist, so ist x von der Form $x = z^2$ mit $z > 0$ und z erfüllt auf so einem Intervall die DGL $2t\dot{z} - 4z = t$.

BW.: Sichtlich ist solches x von der Form $x = z^2$ (diese Einsicht wird auch gestützt durch den Umstand, daß eine Bernoullidgl. mit $s = 2$ vorliegt). Es wird sich aber als hilfreich erweisen, daß man z auf dem ganzen Intervall positiv annehmen kann. Einsetzen in die DGL und Kürzen durch z ergibt

$$2t\dot{z} - 4z = t.$$

Beh 3: Jede Lösung der DGL in Beh.2 ist von der Form $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{c}{t^2}$ mit c so zu wählen, daß z auf dem ganzen Intervall positiv ist. Letzteres ist der Fall, solange $c > 0$ und $t \in (\frac{1}{2c}, \infty)$ liegt. Damit $z(t^+) = \frac{1}{2}(c-1)$ existiert, muß noch $c \geq 1$ sein.

BW.: Man findet die Form der Lösung durch Betrachten der linearen (inhomogenen) DGL. Danach folgt die Eindeutigkeit aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Der weitere Teil der Aussage ergibt sich durch elementare Kurvendiskussion.

Beh 4: Die einzige maximale Intervalllösung x mit $x(1) = 0$ und $x > 0$ auf dem ganzen Intervall ist $x(t) := (\frac{1}{2} - t)^2$. Sie ist auf $(1, \infty)$ definiert und erfüllt die Anfangsbedingung im Sinne eines einseitigen GW.

Als maximale Intervalllösungen, welche $x(1) = 0$ erfüllen, findet man genau 2 Lösungen: (a) die triviale Lösung $x(t) = 0$ auf ganz \mathbb{R} , und (b) eine "gestückelte" Lösung, nämlich jene, die für $t \leq 1$ trivial und auf $[1, \infty)$ durch $x(t) := (\frac{1}{2} - t)^2$ gegeben ist.

BW.: All dies ergibt sich aus elementarer Kurvendiskussion aus Beh.3.

Eine Kleinigkeit: An der Stelle $t = 1$ erfolgt der Nachweis der Differenzierbarkeit und Ermittlung des Wertes von $\dot{x}(1)$ durch Bilden einseitiger Grenzwerte, d.h., man prüft jeweils die einseitigen Ableitungen (ist leicht) und stellt fest, daß beide Null sind.

Beh 5: Die einzige maximale Intervalllösung mit $x(1) = 3$ ist von der Form $x(t) = 0$ für $t \leq \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ und $x(t) := \frac{1}{4t^2}(1 + 2\sqrt{3} - t^2)^2$ für $t > \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

BW.: Einsetzen der Anfangsbedingung (es genügt $z(1^+) = \sqrt{3}$ zu erfüllen!) in Beh.3. Danach elementare Kurvendiskussion.

Auch hier gilt die “Kleinigkeit” aus dem Nachweis vorigen Behauptung zu vermerken.