

1 Modifizierte Angabe – damit es sich ausgeht

Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos t x - 3t^2 \sin(t^3) y + e^{\sin t} \cos(\cos(t^3)) \\ \dot{y} &= 3t^2 \sin(t^3) x + \cos t y + e^{\sin t} \sin(\cos(t^3)).\end{aligned}$$

2 Lösung

Man kann die Rechnung gerne auch im Reellen ausführen, im Komplexen wird die Schreibarbeit reduziert.

Beh 1: Setzt man $z = x + iy$, sowie $v := \cos t + i \sin(t^3)$, so nimmt die DGL die Gestalt

$$\dot{z} = \dot{v}z + e^v$$

an.

Setzt man $a := \cos t$ und $b := 3t^2 \sin(t^3)$, so ergibt $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = (a + ib)(x + iy) + e^v = (ax - by) + i(bx + ay) + e^v$, woraus die Umformung erkennbar ist.

Beh 2: Die allgemeine Lösung der homogenen Lösung ist von der Gestalt

$$z = Ce^v,$$

mit C beliebig komplex. Es sind Realteil und Imaginärteil von e^v eine Lösungsbasis in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervall.

BW: Es ist $\dot{z} = \dot{v}z$ die homogene Gleichung. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\frac{\dot{z}}{z} = \dot{v}$$

sodaß $\log z = v + \log C$ folgt, und somit erkennt man, wie man auf die angegebene Lösung kommt.

Beh 3: In jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervall ist $z = (t + C)e^v$ allgemeine Lösung, d.h., jede Lösung im Intervall kann durch Wahl eines geeigneten C beschrieben werden.

BW: Es genügt, eine partikuläre Lösung anzugeben. Alles andere ist Konsequenz der allgemeinen Theorie. Man möchte die Variation der Konstanten anwenden und das geht hier auch in komplexer Form: $z = ce^v$ mit variablem c führt auf $e^v = \dot{z} - \dot{v}z = \dot{c}e^v + c\dot{v}e^v - \dot{v}ce^v$, somit ergibt sich die DGL

$$\dot{c} = 1,$$

deren Lösung $t = 1$ zur angegebenen partikulären Lösung führt.