

1 Angabe

Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 13 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimme man e^{tJ} (mit J der Jordannormalform von A) und die entsprechende reelle Matrix doppelter Dimension.

2 Lösung

Beh 1: *Das charakteristische Polynom lautet $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 20\lambda - 24$.*

BW.: Man bedient sich vorteilhafter Weise der für 3×3 -Matrizen gültigen Formel

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^3 - \text{spur } A \lambda^2 \\ &\quad + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det A. \end{aligned}$$

wobei $\text{spur } A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ ist.

Beh 2: *Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2(1+i)$ und $\lambda_3 = 2(1-i)$.*

Bei "Schulbeispielen" (genauer bei Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten, welche *normiert* sind, d.h. dessen Leitkoeffizient 1 ist) empfiehlt es sich durchaus nach ganzzahligen Lösungen Ausschau zu halten, und diese sind ganzzahlige Teiler des konstanten Gliedes, in unserem Fall von 24.

Danach bedient man sich z.B. des Hornerschemas

	1	-7	20	-24	j/n
1	1	-6	14	-10	n
2	1	-5	10	-4	n
3	1	-4	8	0	j

um "im 3.ten Versuch" die Lösung $\lambda_1 = 3$ und die nach Abspalten des Linearfaktors $\lambda - 3$ in $p_A(\lambda)$ verbleibende quadratische Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ sofort abzulesen.

Beh 3: *Die Jordannormalform lautet*

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-i) \end{pmatrix}$$

und

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(1-i)t} \end{pmatrix}$$

BW.: Es genügt anzumerken, daß alle drei Eigenwerte paarweise verschieden sind.

Beh 4: Die reelle Matrix M doppelter Dimension hat die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} \Re A & -\Im A \\ \Im A & \Re A \end{pmatrix},$$

wobei

$$\Re A = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \cos(2t) \end{pmatrix},$$

und

$$\Im A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \sin(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \sin(2t) \end{pmatrix}$$

BW.: Es wird $C^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ zerlegt, und danach der C mit $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ identifiziert, also als geordnete Paare von Vektoren im \mathbb{R}^n . Es kann die Matrix in der Gestalt $A = \Re A \oplus i\Im A$ angeschrieben werden. Danach muß die Multiplikation von Matrix mal Vektor in der Form

$$Av = (\Re A + i\Im A)(\Re v + i\Im v) = (\Re A \Re v - \Im A \Im v) + i(\Im A \Re v + \Re A \Im v).$$

Im Sinne geordneter Paare liest man hier die Form

$$\begin{pmatrix} \Re A & -\Im A \\ \Im A & \Re A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re v \\ \Im v \end{pmatrix}$$

ab, also die reelle Matrix der doppelten Dimension.

Somit genügt es, die Matrix A in Real- und Imaginäranteil zu zerlegen, wobei natürlich die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

benützt wird.