

## 1 Modifizierte Angabe

Für das System  $t^2\dot{x} = -2y + t$ ,  $\dot{y} = -x + 1$  ermittle man alle konvergenten Potenzreihenlösungen mit Anschlußstelle  $t = 0$ . Welche Anfangsbedingungen können von solchen Lösungen erfüllt werden.

## 2 Lösung

**Beh 1:** Setzt man  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C := -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , so ist die Gleichung von der Gestalt

$$(At^2 + B)\dot{z} = Cz + at + b.$$

BW.: Ist offensichtlich.

**Beh 2:** Der Ansatz  $z := \sum_j z_j t^j$  führt auf die Bedingungen

$$\begin{aligned} Bz_1 &= Cz_0 + b, \\ Bz_2 &= \frac{1}{2}(Cz_1 + a), \\ (k+1)Bz_{k+1} &= -(k-1)Az_{k-1} + Cz_k \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

BW.: Einsetzen ergibt zunächst

$$\sum_{j \geq 1} jAz_j t^{j+1} + \sum_{j \geq 1} jBz_j t^{j-1} = \sum_{j \geq 0} Cz_j t^j + at + b.$$

Hieraus ergibt sich durch Vergleich der "vektoriellen" Koeffizienten der Potenzen in  $t$  die angegebenen Bedingungen.

**Beh 3:** Als einzige Lösung verbleibt  $z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ . Als Anfangsbedingung kann lediglich  $z(0) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gestellt werden.

Aus den ersten beiden Relationen findet man leicht  $z_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $y_1 = \frac{1}{2}$ , sowie  $y_2 = 0$ . Die leicht einzusehenden Relationen  $AB = BA = 0$ ,

$A^2 = A$ , sowie  $B^2 = B$  ( $A$  und  $B$  sind Projektionen auf die Koordinatenachsen) benützend, wollen wir die letzte der Relationen bei festem  $k \geq 2$  einmal von links mit  $A$  und einmal mit  $B$  multiplizieren. Es ergibt sich

$$0 = -(k-1)Az_{k-1} + ACz_k,$$

m.a.W.

$$y_k = -\frac{k-1}{2}x_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Es ergibt sich in ähnlicher Weise (Linksmultiplikation mit  $B$ )

$$y_{k+1} = -\frac{1}{k+1}x_k, \quad k \geq 2.$$

Für  $k \geq 3$  ergeben die gleichzeitig geltenden Gleichungen

$$y_{k+1} = -\frac{1}{k+1}x_k, \quad y_{k+1} = \frac{k}{2}x_k,$$

daß  $x_2 = y_3 = 0, x_3 = y_4 = 0$ , sodaß wegen  $y_2 = 0$  man  $z_k = 0$  für  $k \geq 2$  haben muß. Somit reduzieren sich die zu erfüllenden Relationen auf

$$Bz_1 = Cz_0 + b, \quad 2Bz_2 = Cz_1 + a, \quad Az_1 = 0.$$

Als einzig mögliche Potenzreihe verbleibt der Polynomvektor

$$z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich ist  $z$  Lösung, wie man durch Einsetzen in die Originalgleichungen sofort einsieht.