

1 Angabe

Gegeben sei das AWP $(x, y)' = (y, -ty^2 + x^2)$ mit $(x, y)(0) = (0, 1)$. Man finde $a > 0$ sodaß auf $(-a, a)$ das Verfahren der sukzessiven Approximation gesichert ist und schätze den Fehler bei Ersetzen der exakten Lösung durch ϕ_2 ab.

2 Lösung

Beh 1: Es sei $r > 0$ und $t \in [-1, 1]$. Dann ist $\lambda := 4r + 2$ eine Lipschitzkonstante für (x, y) in jeder in einem Würfel der Kantenlänge $2r$ und Mittelpunkt $(0, 1)$ enthaltenen Umgebung von $(0, 1)$.

BW.: Es ist

$$\|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| = \|(y - \bar{y}, -t(y - \bar{y})(y + \bar{y}) + (x - \bar{x})(x + \bar{x}))\|.$$

und eine einfache Abschätzung zeigt $|y + \bar{y}| \leq 2 + 2r$ sodaß unter Verwendung der Maximumsnorm

$$\|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| \leq (2 + 2r) + 2r = 4r + 2.$$

Beh 2: Bedingung 3. ist für alle a, b mit $a < \frac{1}{4r+2}$ und $b := -a$ erfüllt.

BW.: klar

Beh 3: Bedingung 4. ist für $a = -b < \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda r + 1)$ erfüllt.

Zunächst ist $M(\alpha, \beta, 0, 1) = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|f(t, 0, 1)\| = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|(1, -t)\| = 1$, wobei wieder die Würfelmetrik zugrunde liegt. Danach verbleibt wegen $b = -a$ lediglich die genannte Bedingung.

Beh 4: Als Fehlerschätzung eignet sich $\|\phi(t) - \phi_2(t)\| \leq \frac{\lambda^2 |t|^3}{6} e^{\lambda|t|}$, wobei $|t| \leq a$ mit a wie in Beh.3 und $\lambda = 4r + 2$ wie in Beh.1 ist.

BW.: Wie in Beh.3 findet man $M(0, t, (0, 1)) \leq 1$. Danach steht alles schon im Vorlesungsskriptum.