

1 Angabe

Für die in Polarkoordinaten durch $r = a(1 + \cos \phi)$ gegebene Kurvenschar ermittle man die orthogonalen Trajektorien.

2 Lösung

Es ist nützlich, in Polarkoordinaten zu arbeiten.

Beh 1: Die Orthogonalität zweier Kurven einander in einem Punkt (r_0, ϕ_0) schneidenden Kurven $z(\phi) = r(\phi)e^{i\phi}$ und $w(\phi) := \rho(\phi)e^{i\phi}$ läßt sich durch die Bedingung

$$\dot{r}\dot{\rho} + r^2 = 0$$

ausgewertet für $r = r_0$, $\phi = \phi_0$ (der Punkt deute Differenzieren nach ϕ an) ausdrücken.

BW.: Zwei komplexe Zahlen a, b sind orthogonal, genau dann wenn $\Re(a\bar{b}) = 0$ ist. Da $\dot{z} = (\dot{r} + ir)e^{i\phi_0}$ und $\dot{w} = (\dot{\rho} + i\rho)e^{i\phi_0}$ orthogonal sind, muß demnach

$$\Re(\dot{z}\bar{\dot{w}}) = \Re((\dot{r} + ir)(\dot{\rho} - i\rho)) = 0$$

sein, woraus die Beh. folgt.

Beh 2: Als DGL der orthogonalen Kurvenschar eignet sich

$$\sin \phi d\rho - (1 + \cos \phi)\rho d\phi = 0.$$

BW.: Aus der GLG der Schar findet man $\dot{r} = -a \sin \phi$, sodaß

$$(1 + \cos \phi)\dot{r} = -r \sin \phi$$

Schargleichung ist. Hieraus findet man wegen $r = \rho$ (die Kurven schneiden einander!)

$$0 = (1 + \cos \phi)(\dot{r}\dot{\rho} + \rho^2) = -\rho \sin \phi \dot{\rho} + (1 + \cos \phi)\rho^2,$$

woraus man nach Kenntnisnahme des Nullpunkts als stationärem Punkt die behauptete Gleichung folgert.

Beh 3: Als orthogonale Kurvenschar findet man $\rho = b \sin^2 \frac{\phi}{2}$, wobei ϕ im Intervall $[0, \pi)$ läuft und b positiv ist.

BW.: Integration und Beachten etwaiger Vorzeichen.