

1 Angabe

Man löse das AWP $\ddot{x} = |x|$ wenn $x(0) = \dot{x}(0) = -1$ ist, indem man zunächst zu einem System 1.Ordnung übergeht, danach Lösungen “errät” und hieraus eine maximale Intervalllösung ermittelt. Man gebe eine Skizze der Trajektorien des Systems 1.Ordnung im (x, y) -Raum bzw. von einem Teil der maximalen Intervalllösung im (t, x, y) -Raum.

2 Lösung

Beh 1: Es ist $\dot{x} = y, \dot{y} = |x|$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = -1$ das zu behandelnde System 1.Ordnung

BW: klar.

Beh 2: Jede Intervalllösung des Systems mit $x > 0$ ($x < 0$) kann in der Form $(x, y) = Ae^t(1, 1) + Be^{-t}(1, -1)$ ($(x, y) = a(\cos t, -\sin t) + b(\sin t, \cos t)$) und einem geeigneten Intervall, in welchem t rangiert beschrieben werden.

BW: Wenn $x > 0$ ist, lautet die ursprüngliche DGL 2.O. $\ddot{x} - x = 0$ und man errät die Lösungen e^t und e^{-t} , aus denen man die Lösung $x = Ae^t + Be^{-t}$ zusammensetzen kann. Demnach ist $y = \dot{x} = Ae^t - Be^{-t}$ und somit $(x, y) = Ae^t(1, 1) + Be^{-t}(1, -1)$ in vektorieller Form geschriebene Lösung des Systems. Die Situation $x < 0$ führt in ähnlicher Manier auf $\ddot{x} + x = 0$, also $\cos t$ und $\sin t$ als zu erratende Lösungen. Danach geht man entsprechend vor, wie eben beschrieben.

Beh 3: Es ist $\phi_-(t) := (-\cos t - \sin t, \sin t - \cos t)$ für $t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ die eindeutig bestimmte maximale Lösungskurve, die vollständig in der linken Halbebene $x < 0$ liegt, und die Anfangsbedingung erfüllt. Es ist $\phi_-(\frac{-\pi}{4}^+) = (0, -\sqrt{2})$ und $\phi_-(\frac{3\pi}{4}^-) = (0, \sqrt{2})$. (Das untere Minus deutet “linke HE” an, das obere \pm bedeutet “einseitigen Grenzwert”.) Als Trajektorie ergibt sich der Halbkreis in der linken HE mit Radius $\sqrt{2}$ um den Nullpunkt.

BW. In der linken HE gilt die Lipschitzbedingung lokal, sodaß durch jeden Punkt genau eine Lösungskurve mit vorgegebenen Anfangswerten verläuft. Einsetzen der Anfangsbedingung in der Darstellung $(x, y) = a(\cos t, -\sin t) + b(\sin t, \cos t)$ ergibt $a = b = -1$. Die Bedingung $x = -\cos t - \sin t < 0$ und elementare Diskussion ergeben $t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, indem man die an 0 nächstgelegenen Nullstellen von $0 = \cos t + \sin t = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} + t)$ bestimmt. Bestimmen der einseitigen GW erfolgt durch Einsetzen der Werte in die Parametrisierung, die sich ja auf ganz \mathbb{R} stetig fortsetzen läßt. (Das dürfen wir aber nicht, weil ja in der rechten HE ϕ_- keine Lösung ist!).

Daß ein entsprechender Halbkreis vorliegt, erkennt man durch Umformen der trigonometrischen Ausdrücke:

$$\phi_-(t) = -\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{2} + t), \cos(\frac{\pi}{2} + t)).$$

Beh 4: Es sei $(A, B) := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{\pi}{4}}, e^{\frac{\pi}{4}})$. Dann ist $\psi(t) := Ae^t(1, 1) + Be^t(1, -1)$ auf $(-\infty, -\frac{\pi}{4})$ eine in der rechten HE liegende Lösung des Systems 1. Ordnung mit $\psi(-\frac{\pi}{4}^-) = \phi_-(-\frac{\pi}{4}^+) = (0, -\sqrt{2})$.

Weiters sei $(C, D) := -\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{3\pi}{4}}, e^{\frac{3\pi}{4}})$. Dann ist $\chi(t) := Ce^t(1, 1) + De^t(1, -1)$ eine in der rechten HE liegende Lösung des Systems 1. Ordnung mit $\psi(\frac{3\pi}{4}^-) = \psi_-(\frac{3\pi}{4}^+) = (0, \sqrt{2})$.

Definiert man

$$\phi(t) := \begin{cases} \psi(t) & t \leq -\frac{\pi}{4} \\ \phi_-(t) & t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ \chi(t) & t \in (\frac{3\pi}{4}, \infty) \end{cases}$$

so ist ϕ die eindeutig bestimmte maximale Intervalllösung des Systems 1. Ordnung welche zur Zeit $t = 0$ durch den Punkt $(-1, 1)$ geht. ϕ beschreibt als Trajektorie in der linken HE den schon genannten Halbkreis und wird durch Hyperbelstücke mit der Gleichung $x^2 - y^2 = -2$ (und $x > 0$) in der rechten HE ergänzt.

BW. Aus Beh.3 erkennt man, daß man an den "Endpunkten" $(0, -\sqrt{2})$ (zur "Zeit" $t = -\frac{\pi}{4}$) bzw. $(0, \sqrt{2})$ (wenn $t = \frac{3\pi}{4}$), entsprechende Anfangswertprobleme formulieren muß, z.B. ist $\dot{x} = y, \dot{y} = x$ und $(x(-\frac{\pi}{2}), y(-\frac{\pi}{2})) = (0, -\sqrt{2})$ und $t \leq -\frac{\pi}{2}$ jenes Anfangswertproblem, welches auf (A, B) führt.

Analog die Ermittlung von (C, D) und χ . Daß ϕ Lösung ist, findet man sofort bestätigt. Die Eindeutigkeit ist auch klar, da ja lokal stets eine Lipschitzbedingung gilt, solange man "nahe" an der Kurve bleibt.

Hinweise zur Erstellung des "Phasenporträts", d.i. einer Skizze der Trajektorien des der DGL 2. Ordnung zugeordneten Systems 1. Ordnung.

Man sieht schnell ein, daß $F(x, y) = x^2 + y^2$ ($G(x, y) = x^2 - y^2$) erste Integrale des Systems in der linken Halbebene, d.h. $x < 0$ bzw. rechten HE ($x > 0$) sind. Somit ergibt sich eine anschauliche Skizze wie folgt:

- In der linken HE zeichnet man Halbkreise mit Mittelpunkt $(0, 0)$ die an der y -Achse jeweils enden.
- In der rechten HE zeichnet man die erste und zweite Mediane, d.h. $y = \pm x$ (wie gesagt, für $x > 0$). Nun skizziert man Hyperbeläste ($x^2 - y^2 = c > 0$), welche in dem von den Medianen eingeschlossenen Winkelbereich liegen und diese als Asymptoten besitzen. Jeder solche Ast ist eine Trajektorie (und ist in keiner anderen enthalten).

Jetzt zeichnet man (halbe) Hyperbeläste zu $x^2 - y^2 = c < 0$, die an den passenden Halbkreis jeweils anschliessen. Damit entsteht ein Kurvenbogen, der den aus den Medianen gebildeten Spitz “umrundet” und die Medianen jeweils zu Asymptoten hat. Jeder solche Bogen ist wieder maximale Trajektorie.

- Fehlt noch $x^2 + y^2 = 0$, d.i. der Nullpunkt als eigenständige maximale Trajektorie.