

## 1 Angabe

Man bestimme ein erstes Integral zu

$$\omega := (2xz - y) dx + \left( \frac{x^2 z}{y} - 2x \right) dy + x^2 dz = 0.$$

## 2 Lösung

Zur Erinnerung: in der VO wird die DGL

$$(2xz - y)\dot{x} + \left( \frac{x^2 z}{y} - 2x \right) \dot{y} + x^2 \dot{z} = 0$$

betrachtet und von einem ersten Integral  $F$  für  $\omega = 0$  gesprochen, falls  $F$  entlang jeder Intervalllösung der DGL konstant ist. Als Methode wird die Konstruktion eines integrierenden Faktors empfohlen.

Anmerkung: Leider ist es (im Gegensatz zu Formen im  $\mathbb{R}^2$ ) auch bei Glattheit nicht immer möglich, einen integrierenden Faktor  $M$  zu finden. Dies kann wie folgt gesehen werden. Wenn  $0 = d(M\omega) = dM \wedge \omega + M d\omega$  gilt, so existiert (lokal) ein  $F$  und umgekehrt. Dann ist auch

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \wedge (d(M\omega)) \\ &= \omega \wedge dM \wedge \omega + M \omega \wedge d\omega \\ &= 0 + M \omega \wedge d\omega \end{aligned}$$

also notwendigerweise  $\omega \wedge d\omega = 0$ . Diese Bedingung ist beispielsweise für  $\omega := z dx + y dz$  sichtlich nicht erfüllt (es ist  $\omega \wedge d\omega = z dx \wedge dy \wedge dz$ ), also kann für dieses  $\omega$  kein integrierender Faktor gefunden werden.

Im vorliegenden Beispiel ist jedoch diese Bedingung erfüllt, und man kann (ganz allgemein) zeigen, daß dann  $M$  (lokal) existieren muß. Nun zum Beispiel.

**Beh 1:** Es sei  $M \circ f$  mit  $f = f(x, y)$  integrierender Faktor. Dann gilt

$$0 = M' df \wedge \omega + M d\omega$$

$$\text{und es ist } d\omega = \left( -1 + 2 \frac{xz}{y} \right) dx \wedge dy - \frac{x^2}{y} dx \wedge dz$$

BW.: Es ist  $dM = M'(f) df$  lt. Kettenregel für Differentiale (=Formen erster Ordnung). Hier die Rechnung, welche das  $d\omega$  ergibt, bei der man  $d(Pdx + Qdy + Rdz) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$  beachtet ( $dP = P_x dx + P_y dy + P_z dz$ , etc sind die totalen Differentiale) und danach davon

ausgeht, daß  $dx \wedge dx = 0$  ist, man also beim  $\wedge$ -Multiplizieren in dieser Situation auf die Berechnung von  $P_x$  verzichten kann:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(2xz - y) \wedge dx + d\left(\frac{x^2z}{y} - 2x\right) \wedge dy + d(x^2) \wedge dz \\ &= 2x dz \wedge dx - dy \wedge dx + 2\frac{xz}{y} dx \wedge dy - 2 dx \wedge dy + \frac{x^2}{y} dz \wedge dy + 2x dx \wedge dz \end{aligned}$$

und Zusammenfassen der entsprechenden Terme (man verwendet  $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$  etc.) ergibt  $d\omega$ .

**Beh 2:** Es gibt einen integrierenden Faktor der Form  $M = M(y)$ , z.B.  $M(y) = y$ .

BW.: Lt. Vorlesung, die Notation von Beh.1 verwendend, wird empfohlen, von  $f = x$ ,  $f = y$ . etc. auszugehen (es handelt sich um ein "Schulbeispiel!"). Für  $f = x$  scheitert man. Es ist für  $f = y$  der Ausdruck  $df \wedge \omega = dy \wedge \omega = (y - 2xz) dx \wedge dy + x^2 dx \wedge dz$ . Dann ergibt sich aus Beh.1

$$\begin{aligned} 0 &= M'(y) dy \wedge \omega + M(y) d\omega \\ &= M'(y)((y - 2xz) dx \wedge dy + x^2 dx \wedge dz) + \\ &\quad M(y) \left\{ \left(-1 + 2\frac{xz}{y}\right) dx \wedge dy - \frac{x^2}{y} dx \wedge dz \right\} \\ &= \left(1 - \frac{2xz}{y}\right) (yM'(y) - M(y)) dx \wedge dy + \frac{x^2}{y} (yM'(y) - M(y)) dx \wedge dz \end{aligned}$$

Es reicht nun, eine nichttriviale Lösung von  $yM'(y) - M(y) = 0$  anzugeben, und eine solche errät man:  $M(y) = y$ .

**Beh 3:** Als erstes Integral eignet sich  $F(x, y, z) = x^2yz - xy^2$ .

BW.: Es genügt, die Form  $y\omega = (2xyz - y^2) dx + (x^2z - 2xy) dy + x^2y dz$  zu betrachten, die überall stetig differenzierbar ist. Eine recht gebräuchliche Methode besteht nun in der Integration entlang eines "Hakenweges" von z.B.  $(0, 0, 0)$  nach  $(x, y, z)$  (natürlich sollte jeder andere rektifizierbare, die Punkte verbindende Weg das gleiche Ergebnis liefern, weil  $F$  ja Potential zum Feld  $(P, Q, R)$  mit  $(P, Q, R) = (2xyz - y^2, x^2z - 2xy, dy + x^2y)$  ist – die Form  $\omega = P dx + Q dy + R dz$  ist exakt genau dann wenn  $(P, Q, R)$  ein Potentialfeld ist!):

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int_0^x P(\xi, 0, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta, 0) d\eta + \int_0^z Q(x, y, \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^x 0 d\xi + \int_0^y (-2x\eta) d\eta + \int_0^z x^2y d\zeta \end{aligned}$$

und Auswerten dieser Integrale ergibt  $F$ .