

1 Korrigierte Angabe

Gegeben sei die lineare DGL 2. Ordnung

$$(8t^2 + 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$$

Man errate eine Lösung in Exponential- oder Polynomgestalt. Danach wende man die D'Alembertsche Methode (Reduktion) an, um eine weitere Lösung zu konstruieren. In welchen Intervallen bilden die beiden Lösungen ein Fundamentalsystem?

2 Lösung

Beh 1: *Es ist $\phi := t$ die einzige Polynomlösung der Gleichung.*

BW.: Falls es eine Polynomlösung gibt, kann man sie (wegen der Linearität) in der Form

$$\phi = t^n + r$$

annehmen, wobei r lediglich Terme von niedrigerem Grad hat. Sichtlich ist $n > 0$, weil 1 keine Lösung ist. Es ist $\dot{\phi} = nt^{n-1} + \dot{r}$, $\ddot{\phi} = n(n-1)t^{n-2} + \ddot{r}$, sodaß nach Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich der Potenz t^n auf die Gleichung

$$0 = 8n(n-1) - 4n - 4 = 4(2n^2 - n - 1)$$

führt. Ihre einzigen Lösung in \mathbb{N} ist $n = 1$. Also ist jede mögliche Polynomlösung mit normiertem Polynom von der Gestalt

$$\phi = t + c.$$

Einsetzen ergibt

$$0 = 0 + 4t - 4(t + c)$$

also $c = 0$.

Beh 2: *Der Ansatz für eine Lösung $\psi = t\sigma$ der DGL führt auf die Gleichung DGL*

$$\ddot{\sigma} + 2\frac{10t^2 + 1}{t(8t^2 + 1)}\dot{\sigma} = 0.$$

BW.: Es sind der

$$\begin{aligned}\psi &= t\sigma \\ \dot{\psi} &= \sigma + t\dot{\sigma} \\ \ddot{\psi} &= 2\dot{\sigma} + t\ddot{\sigma}.\end{aligned}$$

und Einsetzen in die Ausgangsgleichung und Umordnen der Terme ergibt die Beh.

Beh 3: Es gibt eine Lösung σ , derart daß $\dot{\sigma} = t^{-2}(8t^2 + 1)^{-\frac{1}{4}}$.

BW.: Partialbruchzerlegung ergibt die folgende Gestalt der Gleichung für $\dot{\sigma}$:

$$\ddot{\sigma} + \left(\frac{2}{t} + \frac{4t}{8t^2 + 1} \right) \dot{\sigma} = 0.$$

Elementare Integrationstechniken ergeben als eine mögliche Stammfunktion des Koeffizienten von $\dot{\sigma}$ die Funktion $\ln w$, wobei

$$w := t^2(8t^2 + 1)^{\frac{1}{4}},$$

was im Nachhinein durch Differenzieren geprüft werden kann. Somit hat die Gleichung die Gestalt

$$\ddot{\sigma} + \frac{\dot{w}}{w} \dot{\sigma} = 0,$$

und (z.B. durch Trennen der Veränderlichen) wird man auf $\dot{\sigma} = \frac{1}{w}$ geführt, sodaß man schließlich durch Differenzieren die Beh. prüft.

Beh 4: Das uneigentliche Integral

$$\sigma(t) := - \int_t^\infty s^{-2}(8s^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} ds$$

ist eine Lösung der DGL für σ , die auf \mathbb{R}^+ definiert ist, und nirgends verschwindet. Es ist $\{t, t\sigma(t)\}$ eine Lösungsbasis der Ausgangsgleichung auf \mathbb{R}^+ .

BW.: Zunächst ist jede Funktion $F(R, t) := - \int_t^R s^{-2}(8s^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} ds$ für positives R eine Stammfunktion des Integranden. Die Konvergenz von $\lim_{R \rightarrow \infty} F(R, t)$ kann mittels der konvergenten Majorante $\frac{1}{s^2}$ erkannt werden. Nun überlegt man sich (z.B. mittels des Satzes der majorisierten Konvergenz), daß

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_t(R, t) = \frac{\partial}{\partial t} \lim_{R \rightarrow \infty} F(R, t)$$

gilt. Somit ist das uneigentliche Integral eine Lösung der Gleichung für σ . Offenkundig verschwindet das Integral nirgends, weil der Integrand das Vorzeichen niemals wechselt.

Um schließlich die Basiseigenschaft nachzuweisen, genügt es ein $t_0 \in \mathbb{R}^+$ anzugeben, wo die Wronskideterminante

$$D(t) := \begin{vmatrix} t & t\sigma(t) \\ 1 & \sigma(t) + t\dot{\sigma}(t) \end{vmatrix} = t^2\dot{\sigma}(t)$$

nicht verschwindet. Nun folgt aus Beh.3, daß D nirgends auf \mathbb{R}^+ verschwinden kann.

Anmerkung(en): Ähnlich lautet die Aussage für negatives t . Man kann auch zeigen, daß außer der trivialen Lösung $x = 0$, jede Lösung in jeder noch so kleinen Umgebung der Null unbeschränkt ist.

Schlußendlich: Zwar wurde das Integral für σ nicht ausgewertet, jedoch alle Punkte der Aufgabe geklärt.