

1 Modifizierte Angabe

(Die Originalangabe führt auf händisch kaum bewältigbare Probleme bei einem der zu lösenden linearen Gleichungssysteme.)

Man bestimme die Greenfunktion g zum Randwertproblem mit Gleichung $x^{(3)} + 3\ddot{x} + 7\dot{x} + 5x = 1$ und Randbedingungen $x(0) - \dot{x}(0) - 2\ddot{x}(\pi) = 0$, $x(\pi) = \dot{x}(\pi)$, $\dot{x}(0) + 2\dot{x}(\pi) = 1$

2 Lösung

Die Greenfunktion ist das Element $g(t, u) := G_{13}(t, u)$ der Greenmatrix

$$G(t, u) = W(t)(z(t, u)E - R(W)^{-1}DW(\pi))W(u)^{-1}.$$

Nun benötigt man von $W(t)$ die erste Zeile, sie heiße $z_1(t)$, von $W(u)^{-1}$ die dritte Spalte, die wir $s_3(u)$ nennen wollen, sowie die gesamte Matrix $R(W)^{-1}DW(\pi)$, um g in der Gestalt

$$g(t, u) = z_1(t)s_3(u)z(t, u) - z_1(t)R(W)^{-1}DW(\pi)s_3(u)$$

ausdrücken zu können. Weiter unten werden die Funktionen

$$\phi(t) := (e^{-t}, e^{(-1+4i)t}, e^{(-1-4i)t})$$

eingeführt (sie kommen vom Eigenwertproblem) und es wird sich herausstellen, daß $z_1(t)$ und $s_3(u)$ linear in $\phi(t)$, bzw. $\phi(u)$ sind. Daher wird g schließlich eine Bilinearform in den Argumenten $\phi(t)$ und $\psi(u)$, einem Vektor, welcher aus den Reziproken der Eintragungen in $\phi(u)$ besteht:

$$g(t, u) = \sum_{ij} B_{ij} \phi_i(t) \psi_j(u)$$

sein und wir sehen die Aufgabe als bewältigt an, wenn die Koeffizienten der Bilinearform bestimmt sind.

Beh 1: Es sei $\phi := (e^{-t}, e^{(-1+4i)t}, e^{(-1-4i)t})$, so ist die aus den Zeilen $W(t) :=$

$\begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}$ gebildete Matrix eine Wronskimatrix des zugehörigen Systems.

Weiters ist $W(t) = W(0) \text{diag}(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ und $W(\pi) = e^{-\pi} W(0)$.

Es ist mit der Bezeichnung $\kappa := -1 + 4i$

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \kappa & \kappa^2 \\ 4 & \bar{\kappa} & \bar{\kappa}^2 \end{pmatrix}.$$

BW.: Der Ansatz $x = e^{\lambda t}$ führt auf das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5 = 0$. Anwendung des Hornerchemas auf die leicht zu erratende Nullstelle -1 (ein Teiler des konstanten Gliedes 5 - das Polynom hat ganzzahlige Koeffizienten und ist normiert, also kann eine rationale Nullstelle nur auf diese Weise zustandekommen):

	1	3	7	5
-1	1	$3 + (-1) \times 1 =$	$7 + (-1) \times 2 =$	$5 + (-1) \times 5 =$
	1	2	5	0

Somit ist $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ der nach Abspalten des Linearfaktors $\lambda + 1$ verbleibende Faktor des Polynoms, sodaß die Nullstellen des Polynoms

$$-1, -1 + 4i, -1 - 4i$$

sind. Danach ergibt sich die Form der Wronskimatrix aus der allgemeinen Theorie. Die übrigen Aussagen sind unmittelbar einsichtig, weil $\phi(\pi) = e^{-\pi}\phi(0)$ gilt.

Beh 2: Die linearen Abbildungen in ϕ und ψ lauten $z_1(t) = \phi(t)$ und $s_3(u) = \frac{1}{200}(8, -4 + 3i, -4 - 3i)\psi(u)^T$. Die Koeffizientenmatrix der Bilinearform ist von der Form $B = B' + B''$, wobei

$$B' = \frac{z(t, u)}{200} \text{diag} (8, -4 + 3i, -4 - 3i)$$

und

$$B'' = -\frac{1}{200e} R(W)^{-1} DW(0) \text{diag} (8, -4 + 3i, -4 - 3i).$$

Mit den Bezeichnungen $b := e^\pi$ und $\alpha := \frac{1}{e^\pi + 2}$ ergibt sich

$$R(W)^{-1} DW(0) = \begin{pmatrix} -1 + 4\alpha & 1 - (1 - 4i)(-1 + 2\alpha) & 1 - (1 + 4i)(-1 + 2\alpha) \\ 4\alpha & (-2 + 8i)\alpha & (-2 - 8i)\alpha \\ 4 - b/2 & -15 + b - (8 + 2b)i & -15 + b + (8 + 2b)i \end{pmatrix}.$$

BW.: Um die erste Behauptung zu beweisen, geht man von $W(t) = W(0) \text{diag} (\phi(t))$ aus und findet unter Benützung der Abkürzung $\psi(u) := \text{diag} \phi(u)^{-1}$ für den Anteil in der Greenfunktion

$$\{W(t)W(u)^{-1}\}_{13} = \{W(0) \text{diag} (\phi(t)) \text{diag} (\psi(u))^{-1} W(0)^{-1}\}_{13}.$$

Danach braucht man vom Produkt der ersten Matrix die erste Zeile, und vom zweiten die dritte Spalte. Nun berechnet man

$$W(0)^{-1} = \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 136 & 16 & 8 \\ 32 + 26i & -8 - 19i & -4 + 3i \\ 32 - 26i & -8 + 19i & -4 - 3i \end{pmatrix}.$$

wobei man eigentlich nur das Gleichungssystem $W(0)\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T$ lösen müßte. Danach berücksichtigt man den Skalar $z(t, u)$ und Matrizenregeln ergeben B' .

Der Beitrag von $-\{W(t)R(W)^{-1}DW(\pi)W(u)^{-1}\}_{13}$ in g ist umformbar zu $-\{W(0)\text{diag}(\phi(t))R(W)^{-1}DW(\pi)\text{diag}(\psi(u))W(0)^{-1}\}_{13}$ und läßt sich wegen $W(\pi) = e^{-\pi}W(0)$ in der Form

$$-z_1(t)R(W)^{-1}DW(0)s_3(u)$$

anschreiben. Nun ergibt sich die Inverse von $R(W)$ zu

$$R(W)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b & \frac{b}{b+2} \\ 0 & 0 & \frac{b}{b+2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{b^2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrizenmultiplikation, bei der MAPLE oder DERIVE hilfreich sein kann, zusammen mit der ersten Behauptung ergibt B'' .

Nachsatz: Leider können konkrete Anwendungsbeispiele noch grauslicher zu handhaben sein. Die Nachkorrektur der Angabe hat die kleine Marscherleichterung

$$W(\pi) = W(0)e^{-\pi}$$

gebracht. Das wiederum hat die Inversion der Matrizen etwas einfacher gemacht.