

1 Angabe

Man untersuche die Lage geschlossener Trajektorien des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -1 - x - y^2\end{aligned}$$

2 Lösung

Das System besitzt in $P(-1, 0)$ einen einzigen stationären Punkt. Durch die Gleichung

$$y^2 = ce^{-2x} - x - \frac{1}{2}$$

wird für jedes c mit $-e^2 < 2c$ eine geschlossene Trajektorie beschrieben, welche im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Jeder Punkt der Ebene ungleich P liegt auf einer solchen Trajektorie.

Beh 1: Es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann besteht die Menge

$$\{(x, y) \mid y^2 - ce^{-2x} + x + \frac{1}{2} = 0\}$$

aus Trajektorien des Systems.

BW.: Zunächst leitet man die DGL

$$(x + y^2 + 1) dx + y dy = 0$$

her, aus der man durch die Substitution $w := y^2$ die DGL

$$(x + w + 1) dx + \frac{1}{2} dw = 0$$

gewinnt. Elementare Techniken (lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für w und Störterm $-1 - x$) führt zur allgemeinen Lösung

$$w = ce^{-2x} - x - \frac{1}{2}$$

mit beliebiger Konstanten $c \in \mathbb{R}$, aus der die behauptete Gleichung für Punkte von Trajektorien sofort folgt.

Beh 2: Ist $\dot{y} = 0$ und $\dot{x} \neq 0$, so ist $y \neq 0$. In diesem Fall erreicht die Trajektorie für $y > 0$ ($y < 0$) ein absolutes Maximum (Minimum) genau dann wenn $-e^{-2} < 2c$ gilt. Für $-e^{-2} = 2c$ ergibt sich lediglich der Punkt $P(-1, 0)$

als Lösung der Gleichung in Beh.1., welcher mit dem stationären Punkt des Systems übereinstimmt.

BW.: Sei $\dot{y} = 0$ und $\dot{x} \neq 0$ in einem Punkt der Ebene. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Gestalt des Systems.

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodaß die durch einen solchen Punkt verlaufende Kurve durch eine Gleichung

$$y^2 = ce^{-2x} - x - \frac{1}{2}$$

dort lokal bestimmt ist. Es gibt eine Auflösung $y = y(x)$, weil ja $y \neq 0$ sein muß (lt. Annahme ist $\dot{x} = y \neq 0$). Diese Auflösung erfüllt $\dot{y} = y'(x)\dot{x}$ und somit gilt $y' = 0$. Somit ergibt sich wegen $0 = 2yy' = -2ce^{-2x} - 1$ und der Beziehung zwischen x und y bei festem c , welches die genannten Bedingungen erfüllen muß

$$x_0 = -\frac{1}{2} \ln(-2c), \quad y_0 = \sqrt{-1 - x_0}$$

als Kandidat für ein lokales Extremum der die Trajektorie beschreibenden Kurve $y(x)$.

Durch implizites Differenzieren und Beachten von $ce^{-2x_0} = -\frac{1}{2}$ gewinnt man für die 2.te Ableitung

$$y''(x_0)y_0 = 4ce^{-2x_0} = -2.$$

Hieraus ergibt sich die Aussage bezüglich lokaler Extrema.

Beh 3: Erfüllt c die in Beh.1 angegebene Ungleichung, so beschreibt die dort angegebene Gleichung stets einen Grenzykel, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

BW.: Aus Beh.2 entnimmt man, daß alle Punkte, welche die Gleichung

$$y^2 = ce^{-2x} - x - \frac{1}{2}$$

erfüllen, eine Trajektorie bilden, weil ja $\dot{x} = \dot{y} = 0$ für keinen Punkt auf dieser Kurve zutrifft. Es genügt, die Beschränktheit der Abszissenwerte nachzuweisen. Da nun y^2 wegen Beh.2 beschränkt ist, kann x nicht beliebig groß werden, weil sonst in der Gleichung auf der rechten Seite negative Werte auftreten. Ist hingegen x negativ, so kann es nicht beliebig groß werden, weil sonst $y^2 = O(ce^{-2x})$ wird, woraus bei positivem c die Beschränktheit von y^2 , bei negativem c die Nichtnegativität von y^2 verletzt wird.

Um schliesslich die Richtung der Durchlaufung festzulegen, betrachtet man das System im Punkt $Q(1,0)$, dann zeigt der Vektor in Richtung $(0, -1)$, also nach unten. Dort ist, wie man unmittelbar einsieht, auch der "am weitesten rechts" gelegene Punkt jener Trajektorie, die den Punkt Q passiert.

Beh 4: *Jeder Punkt der Ebene liegt auf einer durch die in Beh.1 aufgestellten Gleichung beschriebenen Trajektorie.*

BW.: Man gebe den Punkt $R(x, y)$ der Ebene vor, so ergibt sich ein eindeutiges c durch explizites Ausrechnen, nämlich

$$c(x, y) = e^{2x} \left(y^2 + x + \frac{1}{2} \right).$$

Nun überzeugt man sich, daß das minimale, auf diese Art darstellbare c tatsächlich jenes ist, welches in Beh.2 mit $c = -\frac{1}{2}e^{-2}$ angegeben ist. Alles Analysis 2 – bitte selbst überlegen!