

1 Angabe

Gegeben sei das AWP $(x, y)' = (y, -ty^2 + x^2)$ mit $(x, y)(0) = (0, 1)$. Man zeige, daß das Verfahren zur sukzessiven Approximation auf das AWP anwendbar ist und ermittle die ersten drei Näherungslösungen.

2 Lösung

Beh 1: $f(t, x, y) := (y, -ty^2 + x^2)$ ist auf ganz \mathbb{R}^2 stetig

BW.: Die Koordinaten von f sind Polynomfunktionen und daher stetig.

Beh 2: Es sei G ein beschränktes Gebiet mit $(0, 1) \in G$. Dann gibt es ein positives λ sodaß f in G die Lipschitzbedingung mit diesem λ erfüllt.

BW.: Die Koordinaten von f sind als Polynomfunktionen mindestens 2-mal stetig differenzierbar. Daher ist die totale Ableitung stetig und aus diesem Grunde auf jedem beschränkten Gebiet beschränkt. Als λ eignet sich jede positive Schranke.

Beh 3: Man kann $a < 0 < b$ mit $\max(b, -a)\lambda < 1$ finden.

BW.: Man wählt a, b derart, daß $\max(b, -a) < \frac{1}{\lambda}$.

Beh 4: Es sei $M(\alpha, \beta, (0, 1)) := \max_{t \in [\alpha, \beta]} f(t, 0, 1)$. Sei $r > 0$ derart, daß $G \subseteq K_r((0, 1))$. Dann lassen sich $a \leq \alpha < 0 < \beta \leq a$ mit $\beta \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda r}{M(0, \beta, (0, 1))} + 1 \right)$ und $-\alpha \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda r}{M(\alpha, 0, (0, 1))} + 1 \right)$ finden.

BW.: Es ist $f(t, 0, 1) = -t$, sodaß für α, β gegen 0 die Ausdrücke auf der rechten Seite gegen $+\infty$ streben. Somit gibt es α, β , welche den Forderungen genügen.

Beh 5: Das Verfahren der sukzessiven Approximation ist anwendbar.

BW.: Beh.1–4 sind die Bedingungen der Vorlesung für die Konvergenz des Verfahrens. Somit ist es anwendbar.

Beh 6: Die Näherungen sind

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= (0, 1), \\ \phi_1(t) &= \left(-t, 1 - \frac{t^2}{2}\right), \\ \phi_2(t) &= \left(t - \frac{t^3}{6}, \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^3 + \frac{t^3}{3}\right).\end{aligned}$$

BW.: Es ist $\phi_{n+1}(t) := (0, 1) + \int_0^t f(u, \phi_n(u)) du$ die mit der Anfangsbedingung $\phi_0(t) := (0, 1)$ formulierte Rekursion. Nun ergibt sich die Behauptung durch Einsetzen und Auswerten der Integrale.