

1 Angabe

Man bestimme die Trajektorien der Gleichung

$$(xy^2 + y) dx - x dy = 0.$$

2 Lösung

Zunächst die Definition einer Trajektorie einer *Pfaffschen Gleichung* $Pdx + Qdy = 0$. Es ist $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *Trajektorie*, falls es ein Intervall J und eine Funktion $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, derart daß $(P(\phi(t)), Q(\phi(t)))$ auf $\dot{\phi}(t)$ senkrecht steht (Konkret: $P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0$) und X das Bild unter ϕ ist. Wir gehen auf die Jagd nach maximalen Trajektorien im Sinne der Mengeninklusion.

Zunächst ist es sinnvoll sich auf die Suche nach einem ersten Integral F zu begeben – man weiss ja, daß dann jede Menge Y , deren Punkte $F = c$ genügen unter entsprechenden Glattheitsbedingungen an F aus Trajektorien besteht.

Beh 1: In jeder der Halbebenen $y < 0$ bzw. $y > 0$ ist $F(x, y) := \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y}$ ein erstes Integral.

BW.: Hier sieht man das sehr leicht: Man dividiert durch y^2 und erkennt, daß die Integrabilitätsbedingungen gelten.

$$0 = \left(x + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy.$$

Inspektion (man erkennt die Quotientenregel $d(\frac{x}{y}) = \frac{1}{y^2}(y dx - x dy)$ als Teil der Form und $x dx = d(x^2/2)$) errät man auch ganz leicht oder Methode der Vorlesung ergeben das F .

Beh 2: Ist $c < 0$, so ist die Nullstellenmenge von $x^2y + 2x - 2cy = 0$ eine Trajektorie.

BW.: Zunächst gewinnt man für solches c die Gleichung durch Äquivalenzumformung aus $F(x, y) - c = 0$. Danach wollen wir eine Durchlaufung wie folgt konstruieren (bei der x in die Rolle des Parameters t schlüpft):

$$\phi(t) := (t, -\frac{2t}{t^2 - 2c}).$$

Einsetzen und beachten, daß es sich tatsächlich um eine Durchlaufung handelt ($\dot{\phi} \neq 0!$) ergeben die Beh.

Beh 3: Es sind die Nullstellenmengen von $x = 0$ und $xy + 2 = 0$ Trajektorien.

BW.: Diese Situation ergibt sich für $c = 0$. Man findet $(x, y) = (t, 0)$ und $(x, y) = (t, -2/t)$ als jeweilige Durchlaufungen.

Beh 4: Es ist die Nullstellenmenge von $y = 0$ Trajektorie

BW.: Man wählt als Durchlaufung $(x, y) = (t, 0)$.

Auf die Lösung $y = 0$ kommt man indem man in der Gleichung

$$\frac{x^2 y + 2x}{2c} - y = 0,$$

mit $c \rightarrow \infty$ geht.

Beh 5: Ist $c > 0$, so gibt $F(x, y) = c$ Anlaß für drei Trajektorien, mit Durchlaufungen $(x, y) = (t, -\frac{2t}{t^2 - 2c})$ wobei die Intervalle $J_- := (-\infty, -\sqrt{2c})$, $J_0 := (-\sqrt{2c}, \sqrt{2c})$ und $J_+ := (\sqrt{2c}, \infty)$ verwendet werden.

BW.: Schreibt man die Gleichung in der Form $y = -\frac{2x}{x^2 - 2c}$, so ergibt elementare Kurvendiskussion die Existenz vertikaler Asymptoten mit den Abszissenwerten die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{2c}$. Somit kann $F(x, y) = c$ nicht Gleichung einer Trajektorie sein, weil die Nullstellenmenge nicht zusammenhängend ist. Wohl sind es aber die drei Zusammenhangskomponenten, denen dann die drei Parametrisierungen (mittels in t umgetauften x auf jeweils einem der behaupteten Intervalle) entsprechen.

Anmerkung: Als geometrische Deutung der Trajektorien mag man sich folgendes vorstellen: (P, Q) stellt ein ebenes Vektorfeld dar (z.B. der (ortsabhängige) Geschwindigkeitsvektor, der einem in eine "Strömung" in der Ebene folgenden Teilchen zukommt). Die Trajektorie erweist sich nun als "Kurve", die orthogonal zum Vektor der Strömung verläuft. Es folgt aus dem Hauptsatz der DGL., daß man in jeder Umgebung eines Punktes für ein C^1 -Feld, solche Trajektorien finden kann.

Die "Stromlinien" des Feldes werden als Lösungen des Systems $\dot{x} = \lambda(x, y)P(x, y)$, $\dot{y} = \lambda(x, y)Q(x, y)$ gefunden, wobei $\lambda(x, y)$ eine beliebige, nirgends verschwindende C^1 -Funktion sein darf. Die Stromlinien, in mathematischer Terminologie, sind definiert als die Trajektorien dieses Systems.

Nun vervollständigt sich das Bild: Die Trajektorien der Pfaffschen Gleichung $P dx + Q dy = 0$ bilden eine zu den Trajektorien des DGL-Systems $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ orthogonale Kurvenschar.

Ist F ein erstes Integral des Systems und G eines der Pfaffschen Gleichung, so wird F gerne als *Stromfunktion* und G als *Potentialfunktion* (bei geeignetem λ , d.i. korrekter Wahl des Eulerschen Multiplikators, welcher dann physikalisch gesehen, die "richtige Skalierung" der Geschwindigkeitsvektoren angibt, damit der Gradient von F genau $\lambda(P, Q)$ ist) bezeichnet.