

1 Angabe

Für welche Funktionen $f(x, y)$ führt die Bestimmung eines ersten Integrals von $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ auf eine exakte DGL? Man bestimme die Trajektorien von $\ddot{x} = x^2 - 3$.

2 Lösung

Lt. Vorlesung sind die Trajektorien des Systems 1. Ordnung $\dot{x} = y, \dot{y} = f(x, y)$ gemeint. Danach wird die DGL $f(x, y)\dot{x} - y\dot{y}$ und nun ein erstes Integral gesucht, indem von der Exaktheit von $f(x, y)dx - ydy$ ausgegangen wird.

Beh 1: Die Form $\omega := Pdx + Qdy$ mit $P = f(x, y), Q(x, y) = -y$ ist genau dann in einem Gebiet exakt, falls $f_y(x, y) = 0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn f in jeder offenen Teilmenge A , deren Schnitt mit jeder Ordinate $x = c$ ein Intervall ist.

Zu jeder Funktion F mit $F' = f$ ist $V = F - \frac{y^2}{2}$ ein erstes Integral des Systems.

BW.: Es ist ω genau dann exakt, wenn $0 = P_y - Q_x = f_y$ gilt. Hieraus beweist man mit Mitteln der Analysis, daß f bezüglich y in jedem solchen A konstant ist: es ist wegen des MWS der DR für x, y, \bar{y} in A stets $f(x, y) - f(x, \bar{y}) = f_y(x, y + \theta(\bar{y} - y))(y - \bar{y}) = 0$. Wegen des Zusammenhangs ist somit $f(x, y) = f(x, \bar{y})$ für alle $(x, \bar{y}) \in A$.

Beh 2: Die dem Beispiel entsprechende Form lautet $\omega = (x^2 - 3)dx - ydy$. Als erstes Integral eignet sich (auf ganz \mathbb{R}^2) $V(x, y) = \frac{x^3}{3} - 3x - \frac{y^2}{2}$.

BW. Elementare Integrationstechniken.

Es soll noch auf das Ermitteln der Trajektorien eingegangen werden. Ist X Nullstellenmenge von $V(x, y) = c$, so besteht X aus Trajektorien. Wenn nun X nicht zusammenhängend ist, so sind mindestens so viele Trajektorien vorhanden, als Zusammenhangskomponenten vorliegen. Ist X zusammenhängend, so können Punkte mit $\dot{x} = \dot{y} = 0$, also $P = V_x = 0 = V_y = Q$, die in X liegen, als stationäre Punkte jeweils eigene Trajektorien sein - sie "zerlegen" die Nullstellenmenge $V(x, y) = c$ in zusammenhängende Bögen (Trajektorien) und eben die stationären Punkte. Stationäre Punkte ergeben sich sofort zu $P(\pm\sqrt{3}, 0)$, sofern $c = \mp\sqrt{3}$ ist. Somit hat diese Nullstellenmenge 4 Trajektorien. In allen anderen Fällen (d.h. $c^2 \neq 3$) lassen sich die Trajektorien durch 2 Zweige von Graphen der Funktionen

$$y = \sqrt{\frac{2x^3}{3} - 6x - c}$$

beschreiben. Dann ist der Graph nicht zusammenhängend, falls es drei paarweise verschiedene reelle Nullstellen des Radikanden

$$\phi(x) := \frac{2x^3}{3} - 6x - c$$

gibt. Dies führt auf völlig elementare Kurvendiskussion. ϕ hat an den Stellen $\pm\sqrt{3}$ ein Max/Min mit Wert $\mp 4\sqrt{3} - c$. Eine einfache Skizze der kubischen Kurve macht klar, daß es 3 reelle Nullstellen nur dann geben kann, wenn das Max oberhalb und das Min geradewegs unterhalb der Abszisse liegen. Dies ist der Fall genau dann, wenn $c \in (-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ liegt. Dann gibt es Trajektorien, die im Intervall $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ starten, zunächst ansteigen, bis sie ein Max erreichen, und dann rechts davon wieder in diesem Intervall enden. (Bildhaft: Zwiebschalen). Es ist alles symmetrisch zur Abszisse. Wenn das Maximum auf der Abszisse liegt, wird $P(-\sqrt{3}, 0)$ zum isolierten Punkt von X (das passiert für $c = 4\sqrt{3}$) und eine Trajektorie verläuft von $(2\sqrt{3}, 0)$ monoton steigend. Ist das Maximum unterhalb der Abszisse, gibt es lediglich solche monotonen Äste, die von der Abszisse aus starten. Ist das Minimum auf der Abszisse, so geht vom rechten stationären Punkt noch eine monoton anwachsende Kurve als Trajektorie weg (der stationäre Punkt gehört nicht dazu!). Nun seien Max und Min oberhalb der Abszisse. Da die Quadratwurzel in y die Monotonieverhältnisse (für nichtnegativen Radikanden) nicht ändert, starten links $(-\sqrt{3}, 0)$ Trajektorien, die zunächst monoton anwachsen bis zu einem Max, danach fallen und schließlich monoton gegen ∞ streben.

Wenn Sie bis hierher folgen konnten, haben Sie es schon geschafft, oder schaffen es, die Situation, wenn Max und Min unterhalb der Abszisse liegen, zu diskutieren – eigentlich der leichteste Fall!

Alles in Allem - so wissenschaftlich war das Bspl. nicht gemeint (allerdings doch, soweit es sich um die Existenz des ersten Integrals handelt!) – auch wenn solche Diskussionen in konkreten Problemen erwartet werden können. Hier – in diesem Beispiel war das Sicherstellen des ersten Integrals als zu werten gedacht!