

1 Angabe

Unter welchen Bedingungen wird $\omega := (ax + by + c)dx - (\alpha x + \beta y + \gamma)dy$ mit $b + \alpha \neq 0$ durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor der Form $M = M(px + qy)$ exakt?

2 Lösung

Es soll hier der Fall ω exakt (genau dann wenn $b + \alpha = 0$) ausgeschlossen werden.

Beh 1: Ist $M\omega$ exakt, so gilt

$$0 = M(b + \alpha) + M'((p\alpha + qa)x + (p\beta + qb)y + pc + q\gamma).$$

BW.: Wenn $M = M \circ f$, so ist $d(M\omega) = dM \wedge \omega + M d\omega = M' df \wedge \omega + M \omega$. Weiters ist $df = p dx + q dy$ und $d\omega = -(\alpha + b) dx \wedge dy$. Schliesslich ist mit der Abkürzung $\omega = P dx - Q dy$ sofort $df \wedge \omega = (p dx + q dy) \wedge (P dx - Q dy) = -(pQ + qP) dx \wedge dy$ zu sehen. Hieraus ergibt sich

$$0 = (b + \alpha)M + (pQ + qP)M'.$$

Einsetzen von $P = ax + by + c$ und $Q = \alpha x + \beta y + \gamma$ ergibt die Beh.

(Nebenbei erkennt man für $b + \alpha = 0$, daß man $M = 1$ wählen kann, die Form also exakt ist – und umgekehrt, daß aus der Exaktheit der Form $M' = 0$, also die Konstanz von M folgt.)

Beh 2: Falls es eine auf einem Intervall definierte C^1 -Funktion ϕ und $(p, q) \neq (0, 0)$ gibt, sodaß die lineare Funktion $f(x, y) = Ax + By$ mit $(A, B) \neq (0, 0)$ von der Form $f(x, y) = \phi(px + qy)$ für (x, y) in einer offenen, zusammenhängenden Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist, so gibt es ein reelles $\lambda \neq 0$ mit $(A, B) = \lambda(p, q)$. Es ist dann $\phi(t) = \lambda t + C$ für eine Konstante C .

BW.: Man findet zunächst $(A, B) = \phi'(px + qy)(p, q)$, eine Gleichung, die für alle (x, y) der offenen, zusammenhängenden Teilmenge des \mathbb{R}^2 gilt. Das Bild dieser offenen Menge unter der Abbildung $(x, y) \mapsto px + qy$ ist wegen $(p, q) \neq (0, 0)$ ein offenes Teilintervall im \mathbb{R}^1 und $\phi'(t)(p, q) = (A, B)$ impliziert, daß $\phi'(t) = \lambda$ auf dem ganzen Intervall konstant ist. Somit ist ϕ eine lineare Funktion in $px + qy$, d.h. von der Form $\phi(t) = \lambda t + C$.

Beh 3: Ein M wie in Beh.1 gibt es genau dann wenn das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

reell gelöst werden kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante des charakteristischen Polynoms, $(\alpha - b)^2 + 4a\beta$ nicht negativ ist.

Es ergibt sich als Gleichung für den Multiplikator $M = M(u)$ (mit $u := px + qy$)

$$\frac{M'}{M} = -\frac{b + \alpha}{\lambda u + p\gamma + qc}.$$

Als Multiplikator eignet sich für alle (x, y) mit $\lambda(px + qy) + p\gamma + qc > 0$ der Ausdruck

$$M(px + qy) = (\lambda(px + qy) + p\gamma + qc)^{-\frac{b+\alpha}{\lambda}},$$

wobei λ ein nicht verschwindender Eigenwert ist.

BW.: “ \Rightarrow ”: Aus Beh.1 entnimmt man wegen $M' \neq 0$ auf einer offenen Menge (es ist $dM \neq 0$ auf einer offenen Menge, der Multiplikator ist nicht konstant, weil ja ω nicht exakt ist), daß

$$-\frac{M}{M'}(b + \alpha) = pQ + qP = (p, q) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + p\gamma + qc$$

eine Funktion von $px + qy$ sein muß. Aus Beh.2 bekommt man sofort

$$(A, B) := (p, q) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} = \lambda(p, q),$$

sodaß durch Transponieren das Eigenwertproblem aufscheint. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - (\alpha + b)\lambda + (\alpha b - \beta a)$ und die Diskriminante darf nicht negativ sein, um reelle Lösungen garantieren zu können.

“ \Leftarrow ”: Ist die Diskriminante nicht negativ, so gibt es mindestens einen reellen Eigenwert. Da die Spur der Matrix, $b + \alpha$ die Summe der Eigenwerte ist, und nicht Null ist, kann $\lambda \neq 0$ gefunden werden. Sichtlich gibt es eine offene Menge mit $\lambda(px + qy) + p\gamma + qc > 0$. Somit kann der Multiplikator definiert werden und ist, wie leicht zu prüfen ist, Lösung der Gleichung für den Multiplikator (wobei natürlich $px + qy$ durch u und Differenzieren nach u gemeint ist).