

1 Angabe

Für das DGL-System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x^3 + xy^2 + 4x - (5x + y)\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 - y + 2) \\ \dot{y} &= (x^2y + y^3 + 4y - (5y - x)\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 - y + 2)\end{aligned}$$

bestimme man alle stationären Punkte und Grenzzykel. Man skizziere das Phasenporträt.

2 Lösung

Beh 1: Das Gleichungssystem kann unter Verwendung von $z = x + iy$ in der Form ($r := |z|$)

$$\dot{z} = (x^2 - y + 2)z(r^2 + 4 - (5 - i)r)$$

geschrieben werden.

BW.: Zunächst erkennt man als erste Vereinfachung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (xr^2 + 4x - (5x + y)r)(x^2 - y + 2) \\ \dot{y} &= (yr^2 + 4y - (5y - x)r)(x^2 - y + 2)\end{aligned}$$

und da z dem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sowie iz dem Vektor $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ entspricht, kommt man sehr rasch auf die behauptete Darstellung.

Beh 2: Die Menge der stationären Punkte sind jene der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 2$ zusammen mit dem Ursprung. Der Ursprung ist ein abstoßender Knoten.

BW.: Man bekommt die gefragten Punkte durch Nullsetzen von $\dot{x} + i\dot{y} = \dot{z}$. Demnach ergibt der erste Faktor in der Gleichung in Beh.1 die Punkte der Parabel, danach kommt $z = 0$ und weitere stationäre Punkte kann es nicht geben, da der dritte Faktor keine positive Nullstelle hat.

Zunächst erscheint es sinnvoll, eine "Zeitskalierung" zu verwenden, um den gemeinsamen Faktor $(x^2 - y + 2)$ "loszuwerden". Statt der Zeitvariablen t werde durch $t := (x^2 - y + 2)\tau$, also $\tau(t) = (x^2 - y + 2)^{-1}t$ und $w(\tau) := z(t)$, sodaß unter Anwendung der Kettenregel bezüglich der neuen Variablen (w, τ) unter Beachtung von $w = x + iy$ (lediglich die Zeitabhängigkeit hat sich verändert) das neue System die Form

$$\dot{w} = w(r^2 + 4 - (5 - i)r)$$

annimmt. Da $\dot{r}(0) = 2 > 0$ gilt, hat man an der Laufrichtung der Trajektorien in der Nähe des Nullpunkts nichts geändert (sie werden nur mit anderen Geschwindigkeiten durchlaufen, verändern aber nicht ihre Lage!!). Die Linearisierung

$$\dot{w} = 4w$$

(man behält lediglich die linearen Terme) dieses Systems hat Null als abstoßenden Knoten. Der Satz von Grobman-Hartman erlaubt es, die gleiche Aussage über das nichtlineare System für w und damit für z zu treffen.

Beh 3: *Die Kreise mit Radius 1 und 4 sind aus Trajektorien zusammengesetzt. Der Kreis mit Radius 1 stellt einen anziehenden Grenzzykel dar, welcher mit bezüglich dem Ursprung positiver (ortsabhängiger) Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird. Der Kreisbogen mit Radius 4, der beim linken Schnittpunkt der Parabel mit dem Kreis im Teil unterhalb der Parabel zum rechten Schnittpunkt verläuft, stellt eine Trajektorie dar. Er "verbindet" zwei verschiedene stationäre Punkte (= heterokliner Orbit). Der verbleibende obere Teil des Kreises verbindet ebenfalls den linken Schnittpunkt mit dem rechten und wird von links nach rechts durchlaufen.*

BW.: Von der in Beh.1 gewonnenen Form ausgehend ergibt die Substitution $z = re^{i\phi}$ und $\dot{z} = (\dot{r} + ir\dot{\phi})e^{i\phi}$ durch Einsetzen zunächst

$$(\dot{r} + ir\dot{\phi})e^{i\phi} = (x^2 - y + 2)r(r^2 + 4 - 5r + ir)e^{i\phi},$$

sodaß Trennen von Real- und Imaginärteil auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (x^2 - y + 2)r(r^2 - 5r + 4) \\ \dot{\phi} &= (x^2 - y + 2)r\end{aligned}$$

führt. Die stationären Punkte (bis auf den Ursprung – weil gerade hiezu die Polarkoordinatentransformation ungeeignet ist) der Parabel scheinen auf. Daneben gilt für jedes Teilchen, welches auf einem Kreis mit Radius $r = 1$ oder $r = 4$ seine Bewegung beginnt, daß während der Bewegung sein Abstand $\dot{r} = 0$ konstant bleibt. Also bestehen die beiden Kreise aus Trajektorien. Aus der Gleichung $\dot{\phi} = (x^2 - y + 2)r$ entnimmt man die (ortsabhängige) Laufrichtung. Da diese entlang des Kreises mit Radius 1 stets positiv ist, besteht der ganze Kreis aus einer Trajektorie – ein Grenzzykel. Für den Kreis mit Radius 4 ist dreht sich die Winkelgeschwindigkeit in den Schnittpunkten mit der Parabel um. Er besteht somit aus 2 Trajektorien, welche beide den linken Schnittpunkt mit dem rechten verbinden (sog. *heterokline* Trajektorien oder "Orbits").

Weiters ergibt sich aus der Positivität/Negativität von \dot{r} , je nach Lage oberhalb oder unterhalb der Parabel, ob es sich um einen anziehenden/-abstossenden Teil einer Trajektorie handelt.

3 Skizze

Das Phasenbild der Gleichung ergibt sich wie folgt aus jenem des “zeitskalierten Systems” für w aus dem Beweis in Beh.2:

1. Man skizziert die beiden diesem System zugehörigen Grenzykel, welche beide mit vom Ursprung aus gesehener positiver Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden, wobei der innere ($r = 1$) anziehend, der äußere abstoßend ist.

Danach deutet man den abstossenden Knoten im Ursprung an. Jede Trajektorie startet als Gerade und “biegt schön langsam nach links ab”, um sich asymptotisch dem Kreis mit Radius 1 zu nähern.

Vom Kreis mit Radius 4 nähern sich entgegen dem Uhrzeigersinn Trajektorien ebenfalls dem Kreis mit Radius 1.

Vom Kreis mit Radius 4 entfernen sich außerhalb dieses Kreises Trajektorien als “Spiralen” entgegen dem Uhrzeigersinn. Es empfiehlt sich, 1-2 solche Trajektorien anzudeuten, welche den Ursprung eineinhalb mal umrunden.

Damit ist eine Freihandskizze des Phasenbildes des w -Systems entstanden und wir wenden uns der Interpretation des Entstandenen für das z -System (dem ursprünglichen) zu.

2. Nun zeichnet man die Parabel $y = x^2 + 2$ ein. Sie besteht aus Ruhelagen des ursprünglichen Systems.
3. Nun dreht man im oberen Parabelteil die Laufrichtungen der skizzierten Trajektorienteile um.

Betrachtet man die entstandene Skizze, so erweist sich jeder links der Ordinatenachse liegende Punkt P als α -Grenzmenge zweier Trajektorien, genauer:

- Ist sein Abstand vom Ursprung > 4 , so geht dort ein *heterokliner* Orbit weg, welcher unterhalb der Parabel verläuft, und als ω -Grenzmenge einen rechts von der Ordinate liegenden Punkt P besitzt. Dabei vergrößert sich der Abstand zum Ursprung beim Durchlaufen.

Ein weiterer heterokliner Orbit verläuft im oberen Bereich der Parabel und hat einen Punkt auf dem rechten Ast der Parabel als ω -Grenzmenge. Während des Durchlaufens nimmt der Abstand zum Ursprung monoton ab.

- Ist der Abstand genau 4, so findet man ähnlich wie im vorigen Punkt heterokline Orbits, welche beide auf dem Kreis mit Radius 4 laufen.
- Ist der Abstand < 4 , aber größer als 1, so findet man genau einen heteroklinen Orbit.

Er verläuft oberhalb der Parabel in ähnlicher Weise, wie der erste im ersten Punkt beschriebene.

Ein weiterer Orbit hat P als α -Grenzmenge und spiralt entgegen dem Uhrzeigersinn mit abnehmendem Radius um den Grenzykel mit Radius 1, der für ihn eine ω -Grenzmenge darstellt.

- Ist der Abstand gleich 1, so hat man den Grenzykel vor sich, der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.
- Ist der Abstand < 1 , so gibt es nur den Nullpunkt als α -Grenzmenge von Trajektorien. Diese verlaufen zunächst “fast” gerade und nähern sich entgegen dem Uhrzeigersinn dem Grenzykel $r = 1$ als ω -Grenzmenge.

Verbleibt zu hoffen, daß die vorliegende “Anleitung” Ihnen zu einer anschaulichen Freihandskizze verhilft.