

1 Angabe

Es sei M reguläre $k \times k$ -Diagonalmatrix, A und B $k \times k$ -Matrizen. Differentialgleichungssysteme der Form

$$M\ddot{\mathbf{x}} + A\dot{\mathbf{x}} + B\mathbf{x} = 0$$

beschreiben z.B. den Harmonischen Oszillator mit k Freiheitsgraden. (Noch konkreter – schwingende Ketten, durch Federn verbundene Massen, elektrische Schwingkreise. Im einfachsten Fall steht M für Massen, A für eine Dämpfungsterme, und B für rücktreibende Federkräfte. Gebrauch macht man von solchen Gleichungen bei eher kleinen Schwingungen um eine Ruhelage). Sucht man Lösungen der Gleichung über \mathbf{C} mit dem Ansatz $\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ (wobei \mathbf{v} von t nicht abhängt), so erhält man ein Problem der Linearen Algebra, welches man beschreibe. Wann erhält man eine Lösungsbasis des Systems aus so ermittelten Lösungen?

2 Lösung

Beh 1: *Der Ansatz führt genau dann zu einer nichttrivialen Lösung, wenn λ Lösung von*

$$\det(\lambda^2 M + \lambda A + B) = 0$$

ist, und für \mathbf{v} nichttriviale Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems

$$(\lambda^2 M + \lambda A + B)\mathbf{v} = 0$$

ist.

BW.: Angenommen, es gibt eine Lösung dieser Gestalt. Dann ergeben Einsetzen und Beachten, daß $e^{\lambda t} \neq 0$ ist, das algebraische Problem als Bedingung. Lösen umgekehrt λ und \mathbf{v} das algebraische Problem, so ist sichtlich durch $\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems gegeben.

Beh 2: *Eine Lösungsbasis von Lösungen der angegebenen Form gibt es genau dann, wenn die Blockmatrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}B & -M^{-1}A \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

BW.: Da M lt. (zugegebenermaßen abgeänderter Angabe) regulär ist, kann man zu einem System 1.Ordnung übergehen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}B & -M^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nun hat dieses System genau dann eine Lösung der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

wenn $x = e^{\lambda t}v$ Lösung des Ausgangssystems ist und es ergibt sich dann auch $w = \lambda v$. Somit existiert eine Basis von Lösungen dieser Form eben genau dann, wenn die genannte Matrix diagonalisierbar ist.

Beh 3: *Es sei $A = 0$. Dann ist jede Lösung $e^{\lambda t}v$ von der Bauart $e^{\sqrt{\mu}t}v$, wobei μ ein beliebiger Eigenwert von $-M^{-1}B$ und v ein zugehöriger Eigenvektor ist.*

Eine Lösungsbasis der angegebenen Form gibt es genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}B & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

BW.: All dies kann aus Behauptung 2 abgelesen werden.

Nachbemerkungen:

1. Die Diagonalisierbarkeit der angegebenen Matrix im allgemeinen kann nicht durch einfach zu formulierende Bedingungen an M, A, B garantiert werden.
2. Sind die Lösungen von $\det(\lambda^2 M + \lambda A + B) = 0$ einfache Wurzeln, so kann die Matrix diagonalisiert werden. Die Umkehrung ist falsch, wie das Beispiel von 2×2 -Matrizen $M = I, A = -I, B = 0$ belegt.
3. Ist $M \neq 0$ singulär, so kann das System durch Koordinatentransformation auf eine Gestalt

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

gebracht werden.

4. Vielleicht darf noch auf das einfache Beispiel $\ddot{x} = 0$ hingewiesen werden, welches keine Lösungsbasis der Gestalt $\phi_i = e^{\lambda_i t}v$ besitzt. (Es ist $\phi_1 = 1$ und $\phi_2 = t$ eine Basis auf \mathbb{R}^+). Die oben angesprochene Matrix ($M = 1, B = C = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar.