A : ~~1.1~~, ~~2.1~~, ~~22.1~~, ~~5.1~~, ~~6.1~~, (10.1) 16.1 ~~17.1~~, [illegible], 20.1

Q : ~~1.2~~, ~~3.2~~, 22.3, 4.3, 5.2, 6.4, 9.2, 10.3, 13.3, 14.2, 16.3, 17.2, 18.3, 19.5, 24.2, 25.3,

S : ~~1.3~~, ~~2.3~~, 22.4, 5.4, ~~8.3~~, ~~10.4~~, 13.4, 14.3, 15.3, 16.4, 17.3, 18.4, 19.4, 20.3, 25.2, ~~4.4~~

P : ~~1.4~~, ~~3.3~~, ~~2.4~~, 5.3 *, ~~6.3~~, ~~8.4~~, ~~9.4~~, ~~11.4~~, ~~12.3~~, ~~12.4~~, ~~14.4~~, 17.4, ~~20.4~~, ~~21.4~~ *, ~~21.2~~, ~~22.4~~, 24.4 *, 25.4 ~~7.4~~ (?)

M : ~~3.1~~, ~~8.1~~, ~~10.1~~, ~~11.1~~, 12.1,

B : ~~7.2~~, ~~10.2~~, 11.2, 12.2, 15.2, ~~20.2~~, 21.2, ~~23.2~~, ~~26.3~~,

R : (18.2), ~~19.2~~, ~~23.3~~

E : ~~7.1~~, ~~13.1~~, 14.1, 24.1, 26.1, 27.1

Soutiges : ~~13.2~~, ~~16.2~~, ~~22.2~~

✓ ~~6.2~~, ~~7.2~~, ~~9.1~~

~~23.1~~ ~~25.1~~

1

$\boxed{A}$ 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$xy\,dx - x\,dy = 0$$

(3 P.)

$\boxed{Q}$ 2. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y + 4z\\ \dot{y} &= 5x - y + z\\ \dot{z} &= 2x + 3y + z\end{aligned}$$

(6 P.)

$\boxed{S}$ 3. Stab. der Null-Lsg.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x-y)(x^4+y^4-xy-1)\\ \dot{y} &= (3x+4y)(x^4+y^4-xy-1)\end{aligned}$$

(5 P.)

$\boxed{P}$ 4. Klassifikation der stationären Punkte, Phasenportrait

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x+4)(y^2-y-2)\\ \dot{y} &= (x+1)y(e^y-1)\end{aligned}$$

(6 P.)

$xy\,dx = x\,dy$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{xy}{x} = y$

$\Rightarrow \boxed{y' = y}$

4 PG / MC / 02

2

A 1. Bestimmen Sie die Trajektorie

$$3x^2y^3\,dx + (x^3y^2 + y^4)\,dy = 0$$

B 2. ges.: allg. Lösung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y + 2z\\ \dot{y} &= 4x + 5y + 6z\\ \dot{z} &= x - y + 2z\end{aligned}$$

S 3. Stab. der Null-Lsg. mit Fkt. $v(t, x, y)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2y^3 - \frac{x}{t}\\ \dot{y} &= -tx^3y^2 - e^t y\end{aligned}$$

P 4. Phasenportrait, ∞-Grenzmenge

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 - xy\\ \dot{y} &= x^2 - xy^2\end{aligned}$$

3

M 1. Bestimmen Sie die maximale Intervall-Lösung der Differentialgleichung:

$$\dot{x} = \exp(x+t)\,, \quad x(1) = 3$$

(3 P.)

Q 2. Berechnen Sie die qualitative Lösung des homogenen Systems:

?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y + 2z \\ \dot{y} &= -3x + 5y + z \\ \dot{z} &= x + 2y - 3z \end{aligned}$$

Angenommen, das System wird durch den Vektor $(\sin(2t), 3, 2t)$ gestört. Untersuchen Sie, ob dann periodische Lösungen existieren.

(6 P.)

P 3. Klassifikation der stationären Punkte

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-y)(y^2-2y) \\ \dot{y} &= (x+3)(y^3+1) \end{aligned}$$

(6 P.)

4. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ????????????????? \\ \dot{y} &= ????????????????? \end{aligned}$$

a.) Zeichnen Sie das Phasenprotrait der Differentialgleichung.
b.) Bestimmen Sie die ∞-Grenzmenge zu jeder Lösung.

(5 P.)

(4)

1. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$\ddot{x} = x\dot{x} + \sqrt{1 + \dot{x}^2} \qquad \text{Angabefehler ?}$$

(3 P.)

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

siehe 16.2

$$\ddot{x} + \cosh(t)\dot{x} - (1 + \sinh(t))x = 0$$

Berechnen Sie dazu zuerst eine spezielle Löung einfacher Bauart und wenden Sie danach die Standardmethode an.

(5 P.)

$\boxed{Q}$

2

3. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen von:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= w + x + y + 3z \\
\dot{y} &= 2x + 2y - 4z \\
\dot{z} &= -x - y + 3z \\
\dot{w} &= w + 2x - y - 2z
\end{aligned}$$

(7 P.)

$\boxed{S}$

4. Gegeben ist das System:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (x - y)(2x^2 + y^2 - 1) \\
\dot{y} &= (2x + y)(2x^2 + y^2 - 1)
\end{aligned}$$

Gesucht ist das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung.
Berechnen Sie dieses mit Hilfe einer Hilfsfunktion von Polynomgestalt.

(5 P.)

5

A 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von:

$$xy\,dx + x\,dy = 0$$

(3 P.)

Q 2. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 5y - 3z \\ \dot{y} &= 6x + y + 2z \\ \dot{z} &= 3x - 4y - z \end{aligned}$$

(6 P.)

P 3. Klassifikation der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-4)(y^2 - y - 2) \\ \dot{y} &= (x-1)(e^y - 1)y \end{aligned}$$

(6 P.)

S 4. Stabilitätsverhalten der Null-Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2x + 3y)(x^4 + y^4 + 3xy + 2) \\ \dot{y} &= -(4x + 5y)(x^4 + y^4 + 3xy + 2) \end{aligned}$$

(5 P.)

~~4P4/Hc/07~~

6

$\boxed{A}$ 1. Bestimmen Sie die Trajektorien der Differentialgleichung:

$$3(xy+4)\,dx + x^2\,dy = 0$$

(3 P.)

2. algemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\cos(t) - (\sin(t)-1)y \\ \dot{y} &= (\cos(t)-1)x - y\sin(t) \end{aligned}$$

(5 P.)

$\boxed{P}$ 3. Klassifikation der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+y)(x^2y-4) \\ \dot{y} &= (y-4)(x^3-1) \end{aligned}$$

(6 P.)

$\boxed{Q}$ 4. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Differentialgleichung:

$$x^{(5)} + \ddddot{x} - \dddot{x} + 2\ddot{x} - 3\dot{x} = 0$$

(6 P.)

Red.verfahren v. D'Alembert!

2, spezielle Lsg $\varphi(t)$ erraten

$\tau_1(t)=0$

3 Red.Ansatz: $\psi(t) = c(t)\cdot\varphi(t) + \tau(t)$, also: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t)\varphi_1(t) + 0 \\ c(t)\varphi_2(t) + \tau(t) \end{pmatrix}$

7 ~~8~~

E 1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Kurvenschar der Gleichung:

$$(x-a)^2 + 2y^2 = \cancel{0}\,1$$

(3 P.)

2. Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$x^2(x-1)\ddot{y} - x\dot{y} + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(2) = 5\,, \quad \dot{y}(2) = 6$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung dadurch, daß Sie zuerst eine Polynomlösung finden, dann die Ordnung der Differentialgleichung reduzieren und dann die reduzierte Differententialgleichung lösen.

(6 P.)

3. Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem der Dimension 4:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ????????????? \\ \dot{y} &= ????????????? \\ \dot{z} &= ????????????? \\ \dot{w} &= ????????????? \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Systems **ohne** die Jordan'sche Normalform!!!

(7 P.)

P 4. Bestimmen Sie das Phasenportrait von:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) \\ \dot{y} &= -x + y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie weiters zu jeder Lösung die ∞-Grenzmenge.

(4 P.)

M 1. Bestimmen Sie die maximale Intervall-Lösung des Anfangwertproblems:

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{x} \cos(t)\,, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0$$

(3 P.)

B 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems:

26.3

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y + z \\ \dot{y} &= 2y - 4z \\ \dot{z} &= 2x + 2y \end{aligned}$$

(6 P.)

S 3. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung von:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3x - 4y)(x^2 + 5y^2 - 2) \\ \dot{y} &= (x + 6y)(x^2 + 5y^2 - 2) \end{aligned}$$

(6 P.)

P 4. Gegeben ist das folgende System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 + y^2 - 9) - y(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 + y^2 - 4) \\ \dot{y} &= y(x^2 + y^2 - 9) + x(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 + y^2 - 4) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die geschlossenen Trajektorien des Systems und skizzieren Sie das Phasenportrait. Bestimmen Sie weiters zu jedem Anfangswert die ∞-Grenzmenge der Lösung.

(4 P.)

9

1. Löse:

$$\dot{x} = -3\sin(t) - \frac{e^{3\cos(t)}}{t}$$

(3 P.)

$\boxed{Q}$ 2. Qualitat. Verh.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y + 3z\\ \dot{y} &= 5x - y + 6z\\ \dot{z} &= -4x + 2y + z\end{aligned}$$

Existieren persiod. Lsg. bei Störfkt. $(\sin t, \cos t, 1)$?

(7 P.)

3. Stabilität der Gleichgewichtslagen von:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(x^2 - y^2)\\ \dot{y} &= -x(x^2 + y)\end{aligned}$$

(Hinweis (nicht von Mlitz): System instabil)

(4 P.)

$\boxed{P}$ 4. Phasenportrait, Gleichgewichtslagen, Trajektorien der period. Lsg., ∞-Grenzmengen von:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{x^2+y^2}(x - y\sin 2\pi(x^2+y^2) - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2x}{x^2+y^2})\\ \dot{y} &= \sqrt{x^2+y^2}(y + x\sin 2\pi(x^2+y^2) - \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y}{x^2+y^2})\end{aligned}$$

(6 P.)

YP4/ML/17

10 11

M 1. Bestimmen Sie die maximale(n) Lösung(en) des Anfagswertproblems:

$$\dot{x} = \frac{t+1}{t-1}x^2 , \quad x(2) = 0$$

(3 P.)

B 2. allgemeine Lösung von:

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{2t}$$

(4 P.)

Q 3. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{w} &= w + x + y + 3z \\ \dot{x} &= 2x + 2y - 4z \\ \dot{y} &= -x - y + 3z \\ \dot{z} &= w + 2x - y - 2z \end{aligned}$$

(7 P.)

S 4. Untersuchen Sie die Stabilität der Null-Lösung für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3e^t x - y)(x^2 + 3y^2 - 6) \\ \dot{y} &= (x + 6e^t y)(x^2 + 3y^2 - 6) \end{aligned}$$

(6 P.)

~~4D4/M1/12~~

M B AL

M 1. Bestimmen Sie die maximale(n) Lösung(en) und Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x^3 t e^{-t^2}, \quad x(0) = 1$$

(3 P.)

B 2. allgemeine Lösung von:

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= -x - 5y - 5z \\
\dot{x} &= w + 2x + 4y + 4z \\
\dot{y} &= w + 6y + 4z \\
\dot{z} &= -w - 4y - 4z
\end{aligned}$$

(7 P.)

3. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Lösung $x = \sinh t$ von

$$\ddot{x} + (1-t)\dot{x} + (t-2)x = (1-t)e^{-t}$$

(4 P.)

P 4. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen und Trajektorien der periodischen Lösungen des Systems

!

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (x^2+y^2-4)\left(x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y(x^2+y^2)\right) \\
\dot{y} &= (x^2+y^2-4)\left(x(x^2+y^2) + y \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)
\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite an (0,0) durch den Wert (0,0) stetig zu ergänzen ist. Skizzieren Sie das Phasenprotrait und untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Lösungen.

(6 P.)

12

M 1. max. Intervall-Lsg.

$$\dot{x} + \frac{x^2}{t} = 1\,, \quad x(1) = 2$$

(3 P.)

B 2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= -5w + 4y - 4z \\
\dot{x} &= w - y + 2z \\
\dot{y} &= -13w - x + 8y - 6z \\
\dot{z} &= -3w - x + y + z
\end{aligned}$$

(w,x,y,z)(0)=(0,3,1,1)

(6 P.)

P 3. Phasenprotrait und zu jedem Anfangswert die ∞-Grenzmenge der zugehörigen Lösung.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x^3y + xy^2 + xy \\
\dot{y} &= x^2y^2 + y^3 + y^2
\end{aligned}$$

(5 P.)

P 4. Klassifizieren Sie - soweit dies mit d. Standardmeth. mögl. - die stat. Pkte von

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (y^2 - x)(y^2 + 2y - 3) \\
\dot{y} &= (x + y + 1)(xy - 8)
\end{aligned}$$

(6 P.)

$8 \cdot 13$
24
104

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -13 & 8 & -6 \end{vmatrix} = \underbrace{5 - 4 - 24 + 12 - 4 + 10}_{-5} -$$

$$-(-30 - 32 - 13 \cdot 8 + 4 \cdot 13 + 24 + 80) = -5 - (-62 - \cancel{104} + 52 + \cancel{104}) = 5$$

$(\ker(A - E_4)^2$

13

$\boxed{E}$ 1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Schar der Kreise durch den Ursprung, deren Mittelpunkte auf der Parabel $y = 2x^2 - 1$ liegen.

(4 P.)

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - \frac{2y}{t^2} \\ \dot{y} &= t - x \end{aligned}$$

indem Sie zuerst 2 Lösungen des homogenen Systems mit y von der Gestalt $t^z (z \in \mathbb{Z})$ suchen und sodann nach der $\underbrace{\text{Standardmethode}}_{= \text{Var. d. Konstante}}$ vorgehen.

(5 P.)

$\boxed{Q}$ 3. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + 2y + 3z \\ \dot{y} &= -2x + z \\ \dot{z} &= 2x - 3y + z \end{aligned}$$

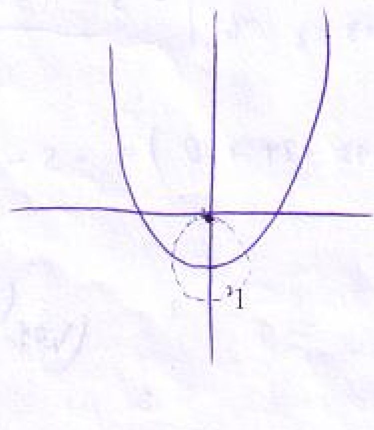
(5 P.)

$\boxed{S}$ 4. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-2x - 3y)(x^2 + y^2 - xy + 3) \\ \dot{y} &= (5x - 2y)(x^2 + y^2 - xy + 3) \end{aligned}$$

ohne das System zu linearisieren.

(5 P.)



$W(t)\dot{c}(t) = b(t)$

$c(t) = \int W^{-1}(t) b(t)\,dt$

~~GDG/ML/15~~ 14

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz
25.04.1996

E 1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Kurvenschar

$$x^2 + 2ax - (y+a)^2 = 2a$$

Q 2. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y + 5z \\ \dot{y} &= 4x + 2y + 3z \\ \dot{z} &= x + 6y + z \end{aligned}$$

S 3. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung:

$$x^{(3)} = \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{5}{8}x - \dot{x}\right)\left(1 - t^2(\dot{x}^2 - 1)\right)$$

P 4. Gesucht: Phasenportrait und ∞-Genzmenge von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y(y^2 - x^2) \\ \dot{y} &= x(y^2 - x^2) \end{aligned}$$

15 ~~16~~ ~~16~~

~~GDE/ML/16~~

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 4.12.1996

1. (4P) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differrentialgleichung

$$y = x(1 + y') + y'^2$$

B

2. (6P) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$x^{(3)} - 5\ddot{x} + 17\dot{x} - 13x = 26t + 18e^{2t} - \sin 3t$$

S

3. (5P) Untersuchen Sie das Stabilitästverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (2e^t x - y)(x^2 + 2y^2 - 4)\\ \dot{y} &= (2x + 3e^t y)(x^2 + 2y^2 - 4)\end{aligned}$$

mit Gilfe eine Hilfsfunktion (von Polynomgestalt)

P

4. (5P)Bestimmen und skizzieren Sie das Phasenporträt des Systems

1,4

Frebl

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 - xy\\ \dot{y} &= x^2 - xy^2\end{aligned}$$

und ermitteln Sie für jeden anfangswet die ∞-Grenzmenge der zugehörigen Lösung (warum ist diese immer eindeutig bestimmt?)

16

~~GDG/ML/17~~

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 25.6.1996

A 1. (3P) Bestimmen Sie die Trajektorien der Gleichung

$$(3xy + 4)dx + x^2 dy = 0 \qquad \hat{=}\, 6.1$$

2. (5P) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + \cosh(t)\dot{x} - (1 + \sinh t)x = 0$$

indem Sie zuerst eine spezielle Lösung (einfacher Bauart) suchen und sodann nach der Standardmethode* vorgehen. (Die letzte auftretende Itegration muß nicht durchgeführt werden.)

Q 3. (7P) Bestimen sie das qualitative Verhalten des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y + 4z \\ \dot{y} &= 5x - y + z \\ \dot{z} &= 2x + 3y + z \end{aligned}$$

Hat das inhomogene Systm mit der Störfunktion

$$(\sin(2t), 0, t)$$

periodische Lösungen?

S 4. (5P) Bestimmen sie das Staibitätsverhalten der Null-Lösung de Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x - y)(2x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= (2x + y)(2x^2 + y^2 - 1) \end{aligned} \qquad \hat{=}\, 4.4$$

mit Hilfe einer Hilfsfunktion in Polynomgestalt

(*) Red.verfahren für homog. Glg. : Lösgbasis: $\{\varphi(t), \alpha(t)\varphi(t)\}$, wobei $\varphi(t)$ gefundene spezielle Lsg., $\alpha(t)$ unbekannt ~ Einsetzen in Glg

77

~~GDG/ML/18~~

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 27.6.1997

siehe 8.1 M 1. Bestimmen Sie die maximale Intervallösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = e^x \cos(t) \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

= 6,4

Q 2. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen von

$$x^{(5)} + x^{(4)} - x^{(3)} + 2x^{(2)} - 3x = 0 \quad \to -3\dot{x}$$

für $t \to \infty$

$$(\sin(2t), 0, t)$$

periodische Lösungen?

S 3. Bestimmen sie das Staibitätsverhalten der Null-Lösung de Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{\sin(x^2 + y^2)}{t^2} \\ \dot{y} &= -5x - \underbrace{c}_{3} y + \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{e^t} \end{aligned}$$

P * 4. Klassifizieren Sie (soweit es mit Standardmethoden möglich ist) die stationären Punkte des Sytems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + y)(x^2 y - 4) \\ \dot{y} &= (y - 4)(x^3 - 1) \end{aligned}$$

~~19~~ 18

~~GDG/ML/19~~

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 25.6.1998

A

1. (4P)Bestimmen sie die Trajektorien der Differentialgleichung

$$(2 + 3x^4 - 2x^2y)dx + (x^2y^2 + x^2e^y - 2x^3)dy = 0$$

R

2. (6P)Stellen Sie die Randbedingungen in Matrixform dar und bestimmen Sie die Lösung(en) des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 4y \qquad & x(0) - 2y(0) &= 1 \\ \dot{y} &= -2x + 4y \qquad & x(0) - y(0) &= 2 - x(1) \end{aligned}$$

Q

3. (6P)Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y + 2z \\ \dot{y} &= -3x + 5y + z \\ \dot{z} &= x + 2y - 3z \end{aligned}$$

Angenommen das System wird durch

$$(\sin(2t), 2, \cos(2t))$$

gestört, existieren dann periodische Lösungen?

S

4. (4P)Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2x + 3y)(x^4 + y^4 + 3xy + 2) \\ \dot{y} &= (4x + 5y)(x^4 + y^4 + 3xy + 2) \end{aligned}$$

~~GDG/M/120~~

19

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz
25.Juni.1998

siehe 18.1 $\boxed{A}$

1. Trajektorien von

$$(2 + 3x^4 - 2x^2y)dx + (x^2y^2 + x^2e^y - 2x^3)dy = 0 \qquad \text{(4P)}$$

$\boxed{R}$

2. RB in Matrixform, Lösung des RWP:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 4y & \qquad x(0) - 2y(0) &= 1 \\ \dot{y} &= -2x + y & \qquad x(0) - y(0) &= 2 - x(1) \qquad \text{(6P)} \end{aligned}$$

$\boxed{Q}$

3. qualitat. Verhalten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y + 2z \\ \dot{y} &= -3x + 5y + z \\ \dot{z} &= x + 2y - 3z \end{aligned}$$

Hat das zugeh. inhomogene System mit Störfunktion $(\sin 2t, 3, \cos 2t)$ period. Lösungen? (6P)

$\boxed{S}$

4. Stabilitätsverhalten der Nullösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-4x + 2y)(2x^2 \sin t + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= (3x - y)(2x^2 - 3y^2 \cos t + 6) \qquad \text{(4P)} \end{aligned}$$

~~21~~

20

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 1.12.1998

A

1. (4P)Bestimmen sie die Trajektorien der Differentialgleichung

$$xy^2 + (x^2y - x)dy = 0$$

B

2. (6P)Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + y + 3z \\ \dot{y} &= 2x + 3y + 3z \\ \dot{z} &= -2x - y - z \end{aligned}$$

Geben Sie die Gestalt einer partikulären L:osung des zugehörigen inhomogenen Systems mit Störfunktion

$$(\sin(t) + 3e^{2t}, \sin(t), -2e^{2t})$$

S

3. (4P)Bestimmen sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-4x + 2y)(\sin(t)x^3 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= (3x - y))2x^2 - 3\cos(t)y^2 + 6) \end{aligned}$$

P

4. (5P) Ermitteln Sie die Trajektorien der periodischen Lösung und skizzieren sie das Phasenportrait des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 + y^2 \overset{-}{\cancel{+}} 5)\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) - y(x^2 + y^2)\left(2 - (x^2 + y^2)^2\right) \\ \dot{y} &= x(x^2 + y^2)\left(2 - (x^2 + y^2)^2\right) + y(x^2 + y^2 - 1)\left(1 - \frac{5}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

21

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 18.1.1999

B

26.3

1. ~~(6P)Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems~~

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + z \\ \dot{y} &= 2y - 4z \\ \dot{z} &= 2x + 2y\end{aligned}$$

P

2. (6P) Betimmen Sie die stabilen Punkte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x^2 + y^2 - 4)(2x(x^2 + y^2 + 1) - y) \\ \dot{y} &= (x^2 + y^2 - 4)(x + 2y(x^2 + y^2 + 1))\end{aligned}$$

und bestimmen sie zu jedem Anfagswert die ∞-Grenzmenge der entprechenden Lösung und skizzieren sie das Phasenportrait des Systems

3. (4P) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Lösung $x = \sinh(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + (1 - t)\dot{x} + (t - 2)x = (1 - t)e^{-t}$$

P

4. (6P) Klassifizieren Sie die stationären Punkte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4y(x^2 - y + 3) \\ \dot{y} &= (2x - xy + 2)(x^2 + y - 9)\end{aligned}$$

A 1. Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x} = \frac{t + x - 3}{2t + x + 4}$$

(4 P.)

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$t^2(\ln t - 1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0, \quad x(2) = 5, \; \dot{x}(2) = 6,$$

indem Sie zunächst eine Polynom-Lösung der Gleichung bestimmen und sodann die Ordnung reduzieren.

(6 P.)

Q 3. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 3y - 2z \\ \dot{y} &= x - 2y + 4z \\ \dot{z} &= x - y - 2z \end{aligned}$$

(5 P.)

S 4. Untersuchen Sie die Stabilität der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (e^{2t}x - y)(x^2 + 2y^2 - 4) \\ \dot{y} &= (2x + 3e^{t}y)(x^2 + 2y^2 - 4) \end{aligned}$$

mit Hilfe einer Hilfsfunktion (Polynomgestalt).

(5 P.)

GDG/ML/23

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Mlitz - 10.4.2000

1. Bestimmen sie die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$$

B 2. allgemeine Lösugen der GDGL

$$x^{(5)} - x^{(4)} + 2x^{(3)} - 2\ddot{x} + \dot{x} - x = e^t \sin t$$

R 3. Zum System $\dot{x} = 3x - 4y, \dot{y} = x + 3y$ ist die Randbedingung $x(0) + y(0) - y(1) = 1, x(0) - 2x(1) + y(0) = 0$ gegeben. Stellen sie die Randbedingung in Matrixform dar und untersuchen sie da Randwertproblem auf eindeutige Lösbarkeit.

P 4. Ermitteln sie die Trajektorien der periodischen Lösugnen des Systems

$$\dot{x} = 6x + 3y + x(x^2+y^2) - (5x+y)\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\dot{y} = -3x + 6y + y(x^2+y^2) + (x-5y)\sqrt{x^2+y^2}$$

und skizzieren sie sein Phasenportrait. Bestimmen sie die ∞-Grenzmenge der Lösung durch den Punkt (x,y)=(1,1)

(23)

(24)

GDG/ML/24

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz - 5.4.2001

E

1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Kurvenschar $2(x-a)^2 + 2y^2 = a^2$.

(3P)

Q

2. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen von $x^{(4)} + 2x^{(3)} - \ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$

(6P)

P

3. Gesucht: Phasenportait und Stabilität der Konstanten und periodischen Lösung von

$$\dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)(x^3 + xy^2 - 4x + y)$$
$$\dot{y} = (x^2 + y^2 - 1)(y^2 + x^2 y - 4y - x)$$

(5P)

P

4. Klassifizieren Sie die stationäre Punkte, soweit das mit der Standarmethode möglich ist.

$$\dot{x} = (x^3 - 3x^2 - 4x)(y^4 + 1)$$
$$\dot{y} = (x - y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 1)$$

(6P)

(25)

GDG/ML/25

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Mlitz - 31.5.2001

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

siehe 13.2

$$\dot{x} = 1 - \frac{2y}{t^2}$$
$$\dot{y} = t - x,$$

indem Sie zuerst 2 Lösungen des homogenen Systems mit y von der Gestalt t^z $(z \in \mathbb{Z})$ suchen und dann für das inhomogene System nach der Standardmethode vorgehen.

S 2. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nullösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3x - 4y)(x^2 \cos t + 2) \\ \dot{y} &= (x + 2y)(x^2 - 2y^2 \sin 2t - 1). \end{aligned}$$

Q 3. Analysieren Sie das qualitative Verhalten für $t \to \infty$ der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y + 5z \\ \dot{y} &= 4x + 2y + 3z \\ \dot{z} &= x + 6y + z. \end{aligned}$$

P 4. Ermitteln Sie die Trajektorien der periodischen Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 6x + 3y + x(x^2 + y^2) - (5x + y)\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} &= -3x + 6y + y(x^2 + y^2) + (x - 5y)\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

und skizzieren Sie sein Phasenportrait. Bestimmen Sie die unendliche Grenzmenge der Lösungen durch die Punkte $(x, y) = (1, 1)$.

CIDEI/ML/26

26

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Prof. Mlitz

21. Juni 2002

E

1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Kurvenschar

$$x^2 + 2ax - (y+a)^2 = 2a$$

siehe 16.2

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + \cosh t \cdot \dot{x} - (1 + \sinh t) \cdot x = 0$$

(Die letzte auftretende Integration muss nicht durchgeführt werden.)

B

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x + 2y + z \\
\dot{y} &= 2y - 4z \\
\dot{z} &= 2x + 2y
\end{aligned}$$

Welche Gestalt haben die Lösungen des zugehörigen inhomogenen Systems mit der Störfunktion (t, t^3, e^t)?

S

4. Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (3e^t x - y) \cdot (x^2 + 3y^2 - 6) \\
\dot{y} &= (x + 6e^t y) \cdot (x^2 + 3y^2 - 6)
\end{aligned}$$

10.4

27

GDG/ML/27

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz - 21.6.2001

E 1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Kurvenschar $(y+a)^2 + x(x+2a) = 2a$.

(3P)

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + \cosh(t)\dot{x} - (1+\sinh(t))x = 0$$

siehe 16.2 indem sie zunächst eine spezielle Lösung einfacher Bauart suchen. Die letzte Integration muss nicht durchgeführt werden.

(6P)

B 3. Bestimmen sie die allgemeine Lösung des Systems

siehe 26.3

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y + z \\ \dot{y} &= 2y - 4z \\ \dot{z} &= 2x + 2y \end{aligned}$$

Welche Gestalt haben die Lösungen des zugehörigen inhomogenen Systems mit der Störfunktion (t, t^3, e^t)

S 4. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

16.4

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3e^t x - y)(x^2 + 3y^2 - 6) \\ \dot{y} &= (x + 6e^t y)(x^2 + 3y^2 - 6) \end{aligned}$$

für $t \to \infty$

(6P)

1) Allgemeine Lösung von $\dddot{x} - 5\ddot{x} + 17\dot{x} - 13x = 26t + 18e^{2t}\sin(3t)$

2) Randwertproblem: $\ddot{x} - 7\dot{x} - 8 = 0$

etwa
$$x(0) - \dot{x}(0) = 2\dot{x}(2) + 1$$
$$x(0) = 2\ddot{x}(2) - \dot{x}(2) + 3$$

3) Klassifikation der stationären Punkte, Phasenportrait
$$\dot{x} = (x+4)(y^2 - y - 2)$$
$$\dot{y} = y(x+1)(e^y - 1)$$

4) Untersuchen Sie die Null-lösung des Systems auf Stabilität
$$\dot{x} = x^2 y^3 - \frac{x}{t}$$
$$\dot{y} = -t x^3 y^2 - e^t y$$

Mlitz-Prüfung vom 12. 1. 2007

Inhaltsverzeichnis

BRUNNEN

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz
Fragen zur mündlichen Prüfung

1. Äquivalenz von Systemen höherer Ordnung zu Systemen 1. Ordnung
2. Geometrische Interpretation - Trajektorien, Lösungskurven, Richtungsfeld, Tangentialvektor
3. Polygonzugverfahren von Euler und Cauchy
4. Idee hinter Runge-Kutta
5. Was stekt hinter Variation der Variablen ($\rightarrow$ Kettenregel)
6. erste Integrale
7. Existenzsätze - Picard-Lindelöf, Peano, Lipschitzbedingung
8. Approximation, die sich aus Picard-Lindelöf ergibt
9. Maximale Intervalllösungen
10. Parametrisierung durch y'
11. Was ist eine exakte Differentialgleichung? Was, wenn nicht exakt?
12. Orthogonale Trajektorien
13. Einhüllende von Kurvenscharen und ihre Bedeutung
14. Differentialgleichung zu einer Kurvenschar (in der Ebene ($F(x, y, a) = 0$))
15. Allgemeine Form der Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen
16. Der Lösungsraum von Systemen linearer Differentialgleichungen; Wann sind Lösungen linear unabhängig; Formel der Wronski-Determinante
17. Wie löst man lin.hom.Gl. $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$
18. Reduktionsverfahren von d'Alembert
19. Variation der Konstanten
20. Resonanz(-phänomene)
21. qualitative Analyse - wie erkennt man aus Hurwitzmatrix nur imag. NS?
22. inhomogene Systeme - Ansätze (Exponentialansatz!, partikuläre Lösung, Variation der Konstanten, Resonanz)
23. lineare Gleichungssysteme mit period. Koeffizienten

24. benachbarte AWP - wann, Abschätzung der Differenz der Lösungen, ...
25. Stabilität (wozu?), asymptotische Stabilität
26. Ljapunow-Funktion (was, wofür)
27. Linearisierung (Methode, mögliche Rückschlüsse)
28. zulässige Rückschlüsse von Stabilitätsaussagen einfache Systeme (z.B. homogen-inhomogen)
29. ∞-Grenzmenge (Definition, Eigenschaften)
30. Kriterium von Dulac
31. Transversalen
32. was kann man aussagen: Trajektorien und Transversalen, $G_\infty(\phi)$ und Transversalen
33. Satz von Poincare-Bendixson
34. Phasenportrait von Sattelpunkt, anziehender Knoten, ...
35. wie erkennt man am Phasenportrait, daß es period. Lösungen gibt?

Lineare Randwertprobleme (Green-Matrix)
Qual. Analyse: Bestimmung der reellen Nullstellen
eines Polynoms $p(t)$
(Antwort: Cauchy-Index)

Κοχρεјεπτε μιτ Δυρχκομμγαραντιε

Δυ λιεστ δας? Λερν λιεβερ, Φαυλπελζ!

A Allgemeine Lösung der DG

außer 22.1.

zB: $\underbrace{xy}_{a_x}\,dx - \underbrace{x}_{a_y}\,dy = 0$

$\frac{\partial a_x}{\partial y} \neq \frac{\partial a_y}{\partial x} \Rightarrow$ nicht exakt

Int. Faktor suchen: $M(x)$ oder $M(y)$ $\Rightarrow \frac{\partial M a_x}{\partial y} = \frac{\partial M a_y}{\partial x}$

$\vdots$

$\frac{M'}{M} = \int \dots$

$M = \dots$

erstes Integral: $\int M \cdot DG$

überprüfen ob Lösungen verloren oder dazugewonnen wurden.

Gleichungen d. Trajektorien angeben.

Q Qualitatives Verhalten

zB: a) System: $\dot{x}_1 = \dots$, $\dot{x}_2 = \dots$, $\dot{x}_3 = \dots$

b) $x^{(5)} + x^{(4)} - x^{(3)} + 2\ddot{x} - 3\dot{x} = 0$

a) Charakteristisches Polynom berechnen

a+b) Hurwitz-Matrix $\rightarrow$ Hauptminoren

- alle HM $\neq 0 \Rightarrow$ keine rein imaginären EW
- Folge $p_n, M_1, \frac{M_2}{M_1}, \frac{M_3}{M_2}, \dots \Rightarrow$ Anzahl Vorzeichenwechsel = Anzahl EW mit Re > 0

Sturmkette

Cauchyindex

mehrere Fälle:

$Re(\lambda_i) > 0$: $\varphi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \pm\infty$

$Re(\lambda_i) < 0$: $\varphi(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$

$Im(\lambda_i) = 0$: $\varphi(t)$ exponentiell, ab Index (t) monoton

$Im(\lambda_i) \neq 0$: Überlagerung von Sinus- und Cosinus-Schwingungen

$\lambda = 0$: konstante Lösung

S Stabilitätsverhalten der Null-Lösung

zB: $\dot{x} = (x-y)(2x^2+y^2-1)$
$\dot{y} = (2x+y)(2x^2+y^2-1)$

außer 14.3, 17.3 richtigen Lösungsweg wählen

HILFSFUNKTION $V(x,y) = ax^2+by^2$ (evtl. tx^2+by^2)

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\dot{y}$$ $\Rightarrow a:=1$, b ausrechnen

a) $V(t,0,0)=0 \quad \forall t$
b) $V(t,x,y)$ pos. definit auf $\overline{S(\alpha,\sigma)}$
c) $\dot{V}(t,x,y)$ neg. definit auf $\overline{S(\alpha,\sigma)}$
d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dot{V}(t,x,y)=0$ gleichmäßig bzgl t

asymptotisch stabil	a	b	c	d
stabil	a	b	c	d
instabil	a	b	c	d

LINEARISIERUNG um (0,0)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix}(0,0)$$

$s(t,x,y) = f(t,x,y) - A\cdot x$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|s(t,x,y)\|}{\|(x,y)\|} \to 0$ gleichmäßig bzgl t ✓

Eigenwerte von A berechnen
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ asymptotisch stabil
- $\lambda_1 \vee \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ instabil

P 1) Phasenportrait, Trajektorien, Gleichgewichtslagen, ∞-Grenzmenge
2) Klassifikation der stationären Punkte

1) Ansatz
$r\dot{r} = x\dot{x}+y\dot{y}$
$r^2\dot{\varphi} = x\dot{y}-y\dot{x}$
$x = r\cdot\cos\varphi$
$y = r\cdot\sin\varphi$
$\Bigg\}$ $\dot{r}, \dot{\varphi}$ berechnen, nullsetzen.

$\dot{r} \lessgtr 0 \Leftrightarrow r\in(\ldots)$
$\dot{\varphi} \lessgtr 0 \Leftrightarrow r\in(\ldots)$

Phasenportrait schöner als Max zeichnen!

Gleichgewichtslagen $\Leftrightarrow \dot{r}=\dot{\varphi}=0$
period. Lsg-Trajektorien $\Leftrightarrow \dot{r}=0$
∞-Grenzmenge = Konvergenz (von r abhängig)

2) $\dot{x}$ und $\dot{y}$ nullsetzen $\Rightarrow P_1, P_2, P_3, \ldots$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix}(P_i)$$ $\Rightarrow$ Eigenwerte berechnen $\Rightarrow$ Fallunterscheidung Seite 3

B Allgemeine Lösung (und Gestalt einer part. Lösung mit Störfunktion)

1) $\dot{x} = \ldots$ $\dot{y} = \ldots$ $\dot{z} = \ldots$ 2) $\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{2t} + 26t - \sin(3t)$

1) χ_A berechnen, Eigenwerte und jeweilige Eigenräume
falls $\dim ER(\lambda_i) <$ Vielfachheit von λ_i als Nullstelle von χ_A
$\Rightarrow$ Hauptvektor durch Hauptraum finden.

$W(t) = T \cdot e^{tJ}$ wobei die Eigenräume die Spalten von T bilden

allgemeine Lösung $= W(t) \cdot \vec{\sigma}$

2) als λ-Funktion ohne Störfunktion aufschreiben $(\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0)$
Exponentialfunktion auf Nullstellen angewandt bildet die reelle Lösungsbasis
Zur Behandlung der partikulären Lösung mit Störfunktionen siehe Seite 4

allgemeine Lösung = Linearkombination der Lösungsbasis $+ \varphi_{P_1} + \varphi_{P_2} + \varphi_{P_3}$

M Maximale Intervalllösung

außer 10.1

zB: $\dot{x} = g(t,x)$ $x(1) = 3$

Trennung der Variablen $\Rightarrow x = \ldots$ $\Rightarrow$ Bedingung für t

AWP einsetzen $\rightarrow$ c ausrechnen

$\rightarrow$ c in Bedingung (max Intervall) und $x = \ldots$ (max. Lösung) einsetzen

R Randwertproblem

zB: $\dot{x} = 3x - 4y$, $\dot{y} = -2x + y$ $\quad x(0) - 2y(0) = 1$, $x(0) - y(0) = 2 - x(1)$

$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}(0) + C \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

χ_A, Eigenwerte und Eigenräume berechnen $\rightarrow W(t) = T \cdot e^{tJ}$

allgemeine Lösung $= W(t) \cdot \vec{\sigma}$

Lösung in Randwertproblem einsetzen

$\Rightarrow (\underbrace{\vec{a}\ \vec{b}}_{F} \mid {}^{1}_{2})$ $\quad F_1 = \begin{pmatrix}1 & \vec{b}\\ 2 & \end{pmatrix}$ $\quad F_2 = \begin{pmatrix} \vec{a} & 1\\ & 2\end{pmatrix}$

Cramer: $\sigma_1 = \dfrac{\det F_1}{\det F}$, $\sigma_2 = \dfrac{\det F_2}{\det F}$

E Einhüllende der Kurvenschar

außer B.1

zB: $(x-a)^2+2y^2=1$

$F(x,y,a) =$ zB $(x-a)^2+2y^2-1 \stackrel{!}{=} \underline{\underline{0}}$

$\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ $\Rightarrow$ a ausdrücken und in $F(x,y,a)$ einsetzen

man erhält mögliche Einhüllende

Singuläre Punkte: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

__Einhüllende__ = mögl. Einhüllende + sing. Punkte, die DG erfüllen und $\notin$ ~~Ein~~ mögl. Einhüllende

Sonstige Reduktionsverfahren

zB: $t^2(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 0$, $y(2)=5$, $\dot{y}(2)=6$

Lösung $\varphi(t)$ erraten $\rightarrow$ Lösungsbasis $= \{\varphi(t), \underbrace{\sigma(t)\cdot\varphi(t)}_{=\psi(t)}\}$ $\Rightarrow$ $\dot{\psi}(t)$, $\ddot{\psi}(t)$ berechnen ($\tau = \dot{\sigma}(t)$)

ψ in DG einsetzen, Trennung der Variablen $\Rightarrow$ $\tau = \ldots$ $\Rightarrow$ $\sigma = \int \tau \, dt$

alg. Lösung $= c_1\varphi(t) + c_2\psi(t)$

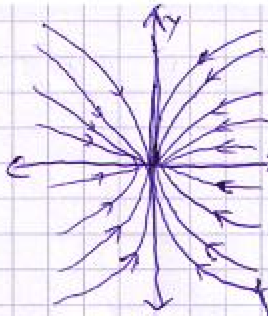
Parametrisierung $y' = p$

zB: $y = x(1+y') + y'^2$

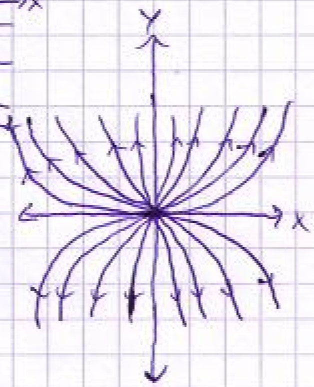
$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}\ \dot{y} = \dot{x}(1+p) + x + 2p \\ \mathrm{II}\ \dot{y} = p\dot{x} \end{array}\right\}$ gleichsetzen $\Rightarrow$ homogene Lösung

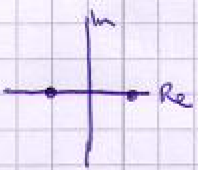
inhomogene Lösung durch Variation der Konstanten $\Rightarrow$ $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$

anziehender Knoten

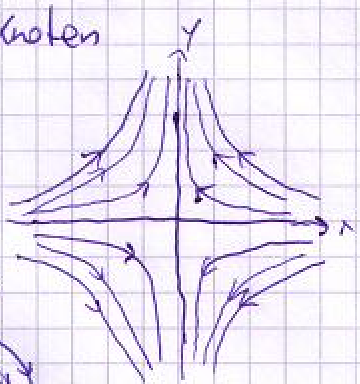


abstoßender Knoten

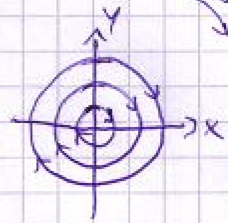




Sattelpunkt

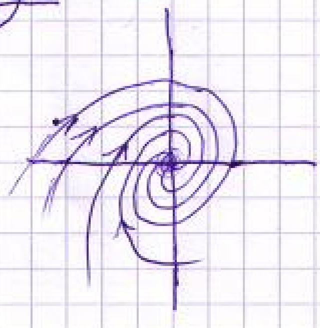


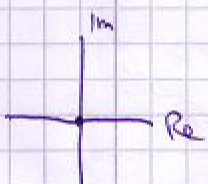
Zentrum



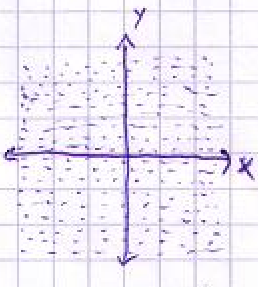
abstoßender Brenn- oder Strudelpunkt

anziehender Brenn- oder Strudelpunkt





ganze Phasenraum Ruhelagen



STÖRFUNKTIONEN

Gestalt von $\vec{b}(t)$

$\vec{c} \cdot e^{at}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \sigma_1 e^{at} \\ \sigma_2 e^{at} \\ \sigma_3 e^{at} \\ \sigma_4 e^{at} \end{pmatrix}$$ wenn a KEIN Eigenwert

$$\varphi = t \cdot \underbrace{\vec{b}(t)}_{\check{t}\, q(t) \cdot e^{at}}$$ wenn a EW + Resonanz

$t^n \cdot \vec{c}$

$$\underbrace{\varphi = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_m(t) \end{pmatrix}}_{\text{grad } p_i \leq n}$$ wenn 0 KEIN Eigenwert

$\sin(at) \cdot \vec{c}$
$\cos(at) \cdot \vec{c}$

$$\varphi = \sin(at) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \cos(at) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$ wenn a,i KEINE Eigenwerte

$\sinh(at) \cdot \vec{c}$
$\cosh(at) \cdot \vec{c}$

$$\varphi = \sinh(at) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \cosh(at) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$ wenn a,-a KEINE Eigenwerte

φ einsetzen in $\dot{\varphi} = A \cdot \varphi + \vec{b}(t)$

Koeffizientenvergleich

$\varphi_P = \sum_{i=1} \varphi_i$

BRUNNEN

A 1.1.) $\underbrace{xy}_{a_x} dx - \underbrace{x}_{a_y} dy = 0$

Integrabilitätsbed.: $\frac{\partial a_x}{\partial y} = x \neq -1 = \frac{\partial a_y}{\partial x}$ $\Rightarrow$ Glg nicht exakt.

suche int. Faktor: $M(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M a_x}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}_{0} \cdot a_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} \cdot M = x \cdot M \\ \frac{\partial M a_y}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} \cdot M = -M'x - M \end{cases}$$

$$x \cdot M = -M'x - M$$

$$M(x+1) = -M'x \quad | :x \quad x \neq 0$$

$$-\frac{x+1}{x} = \frac{M'}{M} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln M)$$

$$\Rightarrow \ln M = -\int dx - \int \frac{1}{x} dx = -x - \ln x$$

$$M = e^{-x} \cdot e^{-\ln x} = \frac{1}{e^x \cdot x}$$

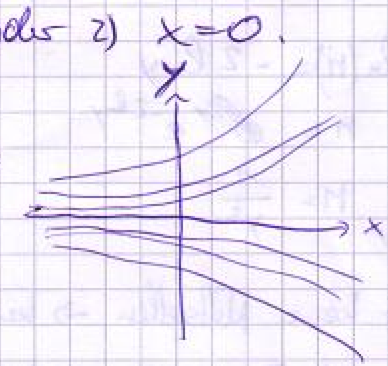
exakte DG: $e^{-x} y\, dx - e^{-x} dy = 0$

erstes Integral: $\underline{F(x,y) = -ye^{-x} + c = 0}$

da $M(x)$ keine Nullstellen hat, sind keine Trajektorien dazugekommen, jedoch ist die Trajektorie $x=0$ verlorengegangen, da $M(0) \nexists$

$\Rightarrow$ Trajektorien d. ursprünglichen Glg genügen daher den Gleichungen 1) $-ye^{-x} = c$, $c \in \mathbb{R}$ oder 2) $x = 0$.

$-ye^{-x} = c \Leftrightarrow y = -c \cdot e^x$ Phasenportrait:



2

A 2.1 $\overbrace{3x^2y^3}^{Q_x}dx + \overbrace{(x^3y^2+y^4)}^{Q_y}dy = 0$

Int. bed: $\frac{\partial Q_x}{\partial y} = 9x^2y^2 \neq 3x^2y^2 = \frac{\partial Q_y}{\partial x}$

suche int. Faktor $M(x)$

$$= \left(\begin{array}{l} \frac{\partial M Q_x}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}_{=0} Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \cdot M = M \cdot 9x^2y^2 \\ \frac{\partial M Q_y}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \cdot M = M'(x^3y^2+y^4) + M\,3x^2y^2 \end{array} \right.$$

$$9Mx^2y^2 = 3Mx^2y^2 + M'x^3y^2 + M'y^4 \quad | : y^2 \neq 0$$

$$\frac{6x^2}{x^3+y^2} = \frac{M'}{M} \qquad x^3 \neq -y^2 \iff x \neq -y^{\frac{2}{3}}$$

M nur von x abhängig!

2. Ansatz: $M(y)$

$$= \left(\begin{array}{l} \frac{\partial M Q_x}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \cdot M = M' \cdot 3x^2y^3 + 9x^2y^2 M \\ \frac{\partial M Q_y}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial M}{\partial x}}_{=0} Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \cdot M = 3Mx^2y^2 \end{array} \right.$$

$$3M'x^2y^3 + 6x^2y^2M = 0$$

$$M'x^2y^3 = -2x^2y^2M$$

$$\frac{M'}{M} = -\frac{2x^2y^2}{x^2y^3} = -\frac{2}{y} \quad | x^2y^2 \quad (x,y \neq 0)$$

$$\ln(M) = -2\ln y$$

$$M = e^{-2\ln y}$$

$$M = \frac{1}{y^2}$$

exakte Glg: $3x^2y\,dx + (x^3+y^2)dy = 0$

erstes Integral: $F(x,y) = x^3y + \frac{y^3}{3} = c$

M hat keine Nullstellen → keine Trajektorie dazugekommen

y=0 als Traj. <u>nicht</u> verlorengegangen, da in F für c=0 enthalten

⇒ Trajektorien der Gleichung genügen $F(x,y) = c \quad c \in \mathbb{R}$

Ansatzüberprüfung:

$\frac{1}{Q_y}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} - \frac{\partial Q_y}{\partial x}\right) = f(x) \Rightarrow M_x$ Lösung ist $e^{f(x)}$

$\frac{1}{Q_x}\left(\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y}\right) = f(y) \Rightarrow M_y$ Lösung ist $e^{f(y)}$

A 5.1) $\underset{\sim}{\overset{a_x}{}}\ \ \underset{\sim}{\overset{a_y}{}}$

$$xy\,dx + x\,dy = 0$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = x \neq 1 = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

$M(x)$:
$$\frac{\partial M a_x}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}_{=0} a_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} \cdot M = Mx$$

$$\frac{\partial M a_y}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} \cdot M = M'x + M$$

$$\Rightarrow Mx = M + M'x$$

$$M(x-1) = M'x \quad | : x \neq 0$$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{M'}{M} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln M)$$

$$x - \ln x = \ln M$$

$$e^{x-\ln x} = M \qquad \Rightarrow e^x y\,dx + e^x\,dy = 0 \qquad \text{exakt}$$

$$M = e^x \cdot \frac{1}{x} \qquad F(x,y) = e^x y = C \qquad \text{exakt}$$

Int Faktor keine NS $\Rightarrow$ keine Traj. dazugekommen

$x=0$ verloren gegangen

Lösungen 1) $e^x y = c$, 2) $x = 0$

A 6.1) $3(\overbrace{\cancel{}xy+4}^{a_x})\,dx + \overbrace{x^2}^{a_y}\,dy = 0$

exakt? $\frac{\partial a_x}{\partial y} = 3x \neq 2x = \frac{\partial a_y}{\partial x}$ ⇒ nicht exakt.

Int. Faktor: $\frac{1}{x^2}\left(3x-2x\right) = \frac{1}{x}$ ⇒ nur von x abhängig ✓

$e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x$ int. Faktor

$(3x^2y + 12x)\,dx + x^3\,dy = 0$

$F(x,y) = x^3y + 6x^2 = c$

~~AZO~~ Lsg dazugekommen: nichts, da einzige NS von $h(x)$: $x=0$ schon ursprünglich Lsg war

keine verlorengegangen

⇒ $F(x,y) = c$ gibt Trajektorie

A16.1 = 6.1

A 181) $\overbrace{(2x^2+3x^4-2x^2y)}^{a_x}dx + \overbrace{(x^2y^2+x^2e^y-2x^3)}^{a_y}dy = 0$

exakt? $\frac{\partial a_x}{\partial y} = -2x^2 \neq 2xy^2+2xe^y-6x^2 = \frac{\partial a_y}{\partial x}$

$$\left(\frac{1}{(2x^2+3x^4-2x^2y)}\left(2xy^2+2xe^y-6x^2+2x^2\right) = \frac{x(2y^2+2e^y-6x+2x)}{x(2x+3x^3-2xy)} \quad \text{nicht } M(y)\right)$$

$$\frac{1}{x^2y^2+x^2e^y-2x^3}\left(-2x^2-2xy^2-2xe^y+6x^2\right) = \frac{2(-x^2-xy^2-xe^y+3x^2)}{x(xy^2+xe^y-2x^2)} = -\frac{2}{x}$$

$$M = e^{+\int\left(\frac{2}{x}\right)dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

exakte Glg: $(2+3x^2-2y)dx + (y^2+e^y-2x)dy = 0$

$$F(x,y) = x^3+2x-2yx+e^y+\frac{y^3}{3} = c$$

$\frac{1}{x^2}$ hat keine NS $\Rightarrow$ nichts dazugekommen

$x=0$ verlorengegangen

Lsgen: 1) $F(x,y) = c$

2) $x=0$

A 20.1) $\overbrace{xy^2}^{a_x}\,dx + (\overbrace{x^2y-x}^{a_y})\,dy = 0$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = 2xy \neq 2xy-1 = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$ n. exakt

$$\frac{1}{x^2y-x}\left(2xy-2xy+1\right) = \frac{1}{x^2y-x}$$ ↯ $M(x)$ hängt auch von y ab

$$\frac{1}{xy^2}(-1) = -\frac{1}{xy^2}$$ ↯ M_y hängt auch von x ab

Angabefehler: $y^2\,dx + (x^2y-x)\,dy = 0$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = 2y \neq 2xy-1 = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

$$\cancel{\frac{1}{y^2}(-1) =} -\frac{1}{y^2}$$ dennoch falsch!

$M(y)$

A 22.1) $\dot{x} = \frac{t+x-3}{2t+x+4}$

Substitution: $t = u+p$, $x = v+q$ (wähle p,q so, dass konst. Terme wegfallen)

$\dot{x} = \dot{v}$

$\dot{v} = \frac{u+p+v+q-3}{2u+2p+v+q+4}$ $\rightsquigarrow$ $p+q=3 \rightarrow q = 3-p$; $2p+q=-4$ $\quad 2p-p=-7$ $\quad p=-7,\ q=10$

$\dot{v} = \frac{u+v}{2u+v} = \frac{\frac{v}{u}+1}{\frac{v}{u}+2}$ $\quad | u \neq 0$

Substitution: $u \cdot y = v \rightsquigarrow y + u\dot{y} = \dot{v}$

$\Rightarrow y + u\dot{y} = \frac{y+1}{y+2} \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{1}{u}\left(\frac{y+1}{y+2} - y\right) \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{1}{u}\left(\frac{1-y-y^2}{y+2}\right)$ $\quad | y \neq 2$

Trennung d. Variablen $\int \frac{y+2}{1-y-y^2}\, dy = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ $\qquad y \neq -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Lösen durch Subst $y = w - \frac{1}{2}$; $w = z \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$; $z = \tan u$

$\Rightarrow \ln(u) + c_1 = -\ln\left(\cos\left(\arctan\left(\left(y+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)\right) + \frac{3}{\sqrt{5}} \arctan\left(\left(y+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad y = \frac{v}{u}$

$\ln(u) + c_1 = -\ln\left(\cos\left(\arctan\left(\left(\frac{x-10}{u}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)\right) + \frac{3}{\sqrt{5}} \arctan\left(\left(\frac{x-10}{u}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\ln(t+7) + c = -\ln\left(\cos\left(\arctan\left(\left(\frac{x-10}{t+7}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)\right) + \frac{3}{\sqrt{5}} \arctan\left(\left(\frac{x-10}{t+7}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\rightarrow$ implizite Darstellung der Diffgl.-Lsg.

B 2.2) allg. Lösung $\dot{x} = 3x + y + 2z$

$\dot{y} = 4x + 5y + 6z$

$\dot{z} = x - y + 2z$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 2\\ 4 & 5-\lambda & 6\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) + 6 - \cancel{8} - \cancel{16 + 2\lambda} + \cancel{18} - \cancel{6\lambda} - \cancel{8 + 4\lambda} =$$

$$= (15 - 8\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 2 =$$

$$= 30 - 16\lambda + 2\lambda^2 - 15\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^3 - 2 =$$

$$= \underline{\underline{-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 31\lambda + 28}}$$

$$(-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 31\lambda + 28) : (\lambda - 4) = \boxed{-\lambda^2 + 6\lambda - 7}$$

$$\begin{array}{l} -\lambda^3 + 4\lambda^2 \\ \hline \quad 6\lambda^2 - 31\lambda \\ \quad 6\lambda^2 - 24\lambda \\ \hline \quad\quad -7\lambda + 28 \\ \quad\quad\quad 0\ R. \end{array}$$

$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-7}$

$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$

$$J = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 3-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 6 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}4 & 1 & 6 & 0\\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{7}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}4 & 1 & 6 & 0\\ 0 & 1 & \frac{14}{5} & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 1 & \frac{14}{5} & 0\end{array}\right)$$

$$\left[\begin{pmatrix}-4\\ -14\\ 5\end{pmatrix}\right] \text{ ER von } \lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1 & 2\\ 4 & 2-\sqrt{2} & 6\\ 1 & -1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1-\sqrt{2}\\ 0 & 6-\sqrt{2} & 10+4\sqrt{2}\\ 0 & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1-\sqrt{2}\\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\\ 0 & 6-\sqrt{2} & 10+4\sqrt{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\right] \text{ ER von } \lambda = 3+\sqrt{2} = \left[\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{2}-2\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

$$10 + 4\sqrt{2} + \frac{6\sqrt{2} - 2}{1-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{10 + 4\sqrt{2} - 10\sqrt{2} - 8 + 6\sqrt{2} - 2}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0}{1-\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1+2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$\text{ER vom } 3-\sqrt{2} = \left[\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}-2\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

$$\text{Wronski } \begin{pmatrix}-4 & -1 & -1\\ -14 & -\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4t} & 0 & 0\\ 0 & e^{t(3+\sqrt{2})} & 0\\ 0 & 0 & e^{t(3-\sqrt{2})}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4e^{4t} & -e^{t(3+\sqrt{2})} & -e^{t(3-\sqrt{2})}\\ -14e^{4t} & (-\sqrt{2}-1)e^{t(3+\sqrt{2})} & (\sqrt{2}-1)e^{t(3-\sqrt{2})}\\ 5e^{4t} & e^{t(3+\sqrt{2})} & e^{t(3-\sqrt{2})}\end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad b_1 \qquad\qquad b_2 \qquad\qquad b_3$$

allg. Lösung: $W(t)\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix} = \sigma_1 \vec{b}_1 + \sigma_2 \vec{b}_2 + \sigma_3 \vec{b}_3$

B 8.2) $\dot{x} = x+2y+z$
$\dot{y} = 2y-4z$
$\dot{z} = 2x+2y$

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-4\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)-16 \cancel{} -2(2-\lambda)+8-8\lambda =$$

$$\cancel{= -2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 28}$$

$$= \cancel{-2\lambda}+3\lambda^2-\lambda^3-12\cancel{+2\lambda}-8\lambda =$$

$$= -\lambda^3+3\lambda^2-8\lambda-12 \qquad \lambda_1=-1$$

$$(-\lambda^3+3\lambda^2-8\lambda-12):(\lambda+1) = -\lambda^2+4\lambda-12$$
$$\underline{-\lambda^3-\lambda^2}$$
$$4\lambda^2-8\lambda$$
$$\underline{4\lambda^2+4\lambda}$$
$$-12\lambda-12$$

$$\lambda_{2,3} = +2 \pm \sqrt{-8}$$
$$\lambda_2 = 2+i2\sqrt{2}$$
$$\lambda_3 = 2-i2\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix}2&2&1\\0&3&-4\\\cancel{2}&\cancel{2}&\cancel{1}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2&2&1\\0&1&-\frac{4}{3}\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{11}{6}&0\\0&1&-\frac{4}{3}&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to ER = \left[\begin{pmatrix}-11\\8\\6\end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1-2\sqrt{2}i&2&1&0\\0&-2\sqrt{2}i&-4&0\\2&2&-2-2\sqrt{2}i&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1-\sqrt{2}i&0\\0&-\sqrt{2}i&-2&0\\-1-2\sqrt{2}i&2&1&0\end{array}\right) \sim \begin{pmatrix}1&1&-1-\sqrt{2}i\\0&1&\frac{2}{\sqrt{2}i}\\1&\frac{2}{-1-2\sqrt{2}i}&\frac{1}{-1-2\sqrt{2}i}\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&\left(-1-\sqrt{2}i-\frac{2}{\sqrt{2}i}\right)\\0&1&\frac{2}{\sqrt{2}i}\\0&\frac{2}{-1-2\sqrt{2}i}-1&\frac{1}{-1-2\sqrt{2}i}+1+\sqrt{2}i\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{2}{\sqrt{2}i}\\0&-\frac{(3+2\sqrt{2}i)}{\cancel{}}&\cancel{-4+3\sqrt{2}i}\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&\frac{2}{\sqrt{2}i}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to ER = \left[\begin{pmatrix}\sqrt{2}i\\-2\\\sqrt{2}i\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$ER(\lambda_3) = \left[\begin{pmatrix}1\\-i\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\text{Wronski-M} = \begin{pmatrix}-11&1&1\\8&i\sqrt{2}&-i\sqrt{2}\\6&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{2t}\cdot e^{i2\sqrt{2}t}&0\\0&0&e^{2t}e^{-2\sqrt{2}ti}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-11e^{-t}&e^{2t}e^{i2\sqrt{2}t}&e^{2t}e^{-2\sqrt{2}ti}\\8e^{-t}&\sqrt{2}i\,e^{2t}e^{i2\sqrt{2}t}&-i\sqrt{2}e^{2t}e^{-2\sqrt{2}it}\\6e^{-t}&e^{2t}e^{i2\sqrt{2}t}&e^{2t}e^{-2\sqrt{2}it}\end{pmatrix}$$

WM, Spalten davon sind Lösungsbasis über $\mathbb{C}$

reelle Lösungsbasis:
$$\begin{pmatrix}-11e^{-t}&e^{2t}\cos(\sqrt{8}t)&e^{2t}\cos(\sqrt{8}t)\\8e^{-t}&-e^{2t}\sqrt{2}\sin(\sqrt{8}t)&-\sqrt{2}\sin(\sqrt{8}t)\\6e^{-t}&e^{2t}\cos(\sqrt{8}t)&e^{2t}\cos(\sqrt{8}t)\end{pmatrix} =: V(t)$$

allg. Lösung: $\varphi = V(t)\cdot\begin{pmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{pmatrix}$

für 26.2) Störfkt $\begin{pmatrix}t\\t^3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\e^t\end{pmatrix}$

B 23.2) $x^{(5)} - x^{(4)} + 2x^{(3)} - 2\ddot{x} + \dot{x} - x = e^t \sin t = \operatorname{Im}(e^{t(1+i)})$

$\lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1$

$(\lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$

$\underline{\lambda^5 - \lambda^4}$

$0 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2$

$\underline{2\lambda^3 - 2\lambda^2}$

$\lambda - 1$

$\lambda_{2,4} = -1 \pm 0$

$\lambda_2 = i$

$\lambda_3 = -i$

Lösungsbasis $= \{e^t, \cos t + i\sin t, \cos t - i\sin t, t\cdot.., t\cdot..\}$ $EW = \{1, i^{(2)}, -i^{(2)}\}$

reelle Lösungsbasis: $\{e^t, \cos t, t\cdot\cos t, \sin t, t\cdot\sin t\}$

<u>part. Lsg:</u> $x^{(5)} - x^{(4)} + 2x^{(3)} - 2x^{(2)} + \dot{x} - x = e^{t(1+i)}$ Komplexifizierung!

$\rightarrow \exists$ Lsg der Gestalt $t^\nu q e^{t(1+i)}$ (ν .. Vielfachheit von $1+i$ als NS $\rightarrow 0$)

einsetzen: $\cancel{e^{t(1+i)}} = q\cancel{e^{t(1+i)}}\left(\cancel{-1} + \cancel{1} + i - 2(i+1)^2 + 2(i+1)^3 - (i+1)^4 + (i+1)^5\right)$

$\Rightarrow q = (i + \cancel{2} - 4i - \cancel{2} + 2\cdot 2i(i+1) + 4 - 4(i+1))^{-1} =$ $\quad (i+1)^2 = 2i$

$= (-3i - 4 + \cancel{4i} + \cancel{4} - \cancel{4i} - \cancel{4}) = -\frac{1}{3i+4} = \frac{3i-4}{25}$

$\rightarrow \varphi_p(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{3i-4}{25} e^{t(i+1)}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{25}(3i-4)e^t e^{it}\right) =$

$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^t}{25}(3i-4)\cdot(\cos t + i\sin t)\right) =$

$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^t}{25}\left((-4\cos t - 3\sin t) + i(3\cos t - 4\sin t)\right)\right) =$

$= \frac{e^t}{25}(3\cos t - 4\sin t)$

$$\boxed{\text{allg. Lsg: } \varphi(t) = c_1 e^t + \cos t\,(c_2 + c_3 t) + \sin t\,(c_4 + c_5 t) + \frac{e^t}{25}(3\cos t - 4\sin t)}$$

B 10.2) $\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{2t}$

1) allg. Lsg d. hom. Glg: $\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$

char Poly: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ $\quad \lambda_1 = 2$

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2) : (\lambda - 2) = \lambda^2 + 1 =$$
$$\lambda^3 - 2\lambda^2$$
$$0 + \lambda - 2$$

EWe: $\{2, i, -i\}$

reelle Lösungsbasis: $\{e^{2t}, \cos t, \sin t\}$ weil $\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$

reelle JNF

2) part Lsg d. inhom. Glg

Störfunktion hat die Gestalt: $p(t) \cdot e^{ct}$ (Grad $p = 0$, $c = 2$)

$\rightarrow \exists$ Lsg der Gestalt $t^r q(t) \cdot e^{ct}$ $\quad$ (r .. Vielfachheit v. c als Nullstelle $= 1$, grad $q \leq$ grad $p = 0$)

$= q \cdot t e^{2t} =: \varphi$

$$\dot{\varphi} = q(e^{2t} + 2te^{2t}) = qe^{2t}(1 + 2t)$$
$$\ddot{\varphi} = 2qe^{2t}(1 + 2t) + qe^{2t} \cdot 2 = 2qe^{2t}(2 + 2t)$$
$$\dddot{\varphi} = 4qe^{2t}(2 + 2t) + 2qe^{2t} \cdot 2 = 4qe^{2t}(3 + 2t)$$

$$\cancel{e^{2t}} = 4q\cancel{e^{2t}}(3 + 2t) - 4q\cancel{e^{2t}}(2 + 2t) + q\cancel{e^{2t}}(1 + 2t) - 2q\cancel{e^{2t}}$$
$$1 = 4q + q + \cancel{2qt} - \cancel{2qt}$$
$$q = \frac{1}{5} \quad \rightarrow \boxed{\varphi_p = \frac{t}{5} e^{2t}}$$

allg. Lösung: $\underline{\varphi(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \left(c_3 + \frac{t}{5}\right) e^{2t}}$

B 12.2) $\begin{pmatrix} \dot w \\ \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -13 & -1 & 8 & -6 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:= A} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A = \rightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -\lambda & -1 & 2 \\ -13 & -1 & 8-\lambda & -6 \\ -3 & -1 & 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)\left(-\lambda(\lambda^2-9\lambda+8)-6-\cancel{7}+16-2\lambda-6\lambda+7+2\lambda\right)+$$

$$+4\left(-1+\lambda-18\lambda+26-6-6-13\lambda+13\lambda^2\right)+$$

$$+4\left(-1+24\lambda-3\lambda^2-13+3+8-\lambda-13\lambda\right)=$$

$$=(-5-\lambda)\left(-\lambda^3+9\lambda^2-8\lambda+7-7\lambda\right)$$

$$+4\left(13\lambda^2-30\lambda+13\right)$$

$$+4\left(-3\lambda^2+10\lambda-3\right)=$$

$$=5\lambda^3-45\lambda^2+40\lambda-35+35\lambda+\lambda^4-9\lambda^3+8\lambda^2-7\lambda+7\lambda^2$$

$$+52\lambda^2-120\lambda+52$$

$$-12\lambda^2+40\lambda-12$$

$$\underline{\underline{=\lambda^4-4\lambda^3+10\lambda^2-12\lambda+5}}$$

$$(\lambda^4-4\lambda^3+10\lambda^2-12\lambda+5):(\underbrace{\lambda^2-2\lambda+1}_{=(\lambda-1)^2})=\lambda^2-2\lambda+5$$

$$\begin{array}{l} \lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2 \\ \hline -2\lambda^3+9\lambda^2 \\ -2\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda \\ \hline 5\lambda^2-10\lambda+5 \\ 5\lambda^2-10\lambda+5 \\ \hline 0\ \text{R.} \end{array}$$

$\Downarrow$

1 doppelter EW

$\lambda^2-2\lambda+5$

$\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{-4}$ $\qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$

$$ER(1) \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -13 & -1 & 7 & -6 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ER(1) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$(A-E_4)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -13 & -1 & 7 & -6 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -13 & -1 & 7 & -6 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 8 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow HR = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -13 & -1 & 7 & -6 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung 12.2) 3

$$(A-(1-2i)E)^2 = \begin{pmatrix} -3+i & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1+2i & -1 & 2 \\ -13 & -1 & 7+2i & -6 \\ -3 & -1 & 1 & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2i & -1 & 2 \\ 0 & -1+7i & -1+i & 4-2i \\ 0 & -14+26i & -6+2i & 20 \\ 0 & -4+6i & -2 & 6+2i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2i & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4+3i}{25} & \frac{-9-13i}{25} \\ 0 & -7+13i & -3+i & 10 \\ 0 & -2+3i & -1 & 3+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3-i}{5} & \frac{3+i}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4+3i}{25} & \frac{-9-13i}{25} \\ 0 & 0 & -8-6i & 18+26i \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-8-6i} & \cancel{18+26i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 25 & 4+3i & -9-13i \\ 0 & 0 & 1 & -3-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1-i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ER(1-2i) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 3+i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ER(1+2i) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 3-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$WM: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+i & 1-i \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3+i & 3-i \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t-2it} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t+2it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos 2t & e^t\sin(2t) \\ -e^t\sin(2t) & e^t\cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^t\cos 2t - e^t\sin 2t & e^t\cos 2t + e^t\sin 2t \\ -e^t & (1-t)e^t & 0 & 0 \\ -e^t & -te^t & 3e^t\cos 2t - e^t\sin 2t & e^t\cos 2t + 3e^t\sin 2t \\ -e^t & -te^t & e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} = \Big\{ \text{allg. Lsg}$$

$W(0)\cdot\vec{\sigma} = (0,3,1,1)^T$ suche $\vec{\sigma}$

$\mathrm{I}\quad \sigma_3 e^t(\underbrace{\cos 2t - \sin 2t}_{=1}) + \sigma_4 e^t = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_3 = -\sigma_4$

$\mathrm{II}\quad -\sigma_1 e^t + \sigma_2(1-t)e^t = 3 \quad \Rightarrow -\sigma_1 + \sigma_2 = 3$

$\mathrm{III}\quad -\sigma_1 e^t - \sigma_2 t e^t + \sigma_3 e^t(3) + \sigma_4 = 1 \quad \Rightarrow -\sigma_1 + 2\sigma_3 = 1$

$\mathrm{IV}\quad -\sigma_1 + \sigma_3 = 1 \quad \Rightarrow -\sigma_1 + \sigma_3 = 1$

$\sigma_1 = -1$
$\sigma_3 = 0$
$\sigma_4 = 0$
$\sigma_2 = 2$

$$\text{Lösung des AWP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B 15.2) $\dddot{x} - 5\ddot{x} + 17\dot{x} - 13x = 26t + 18e^{2t} - \sin 3t$

1) φ_{hom}: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$ $\lambda_1 = 1$ $(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$

$\lambda^3 - \lambda^2$

$-4\lambda^2 + 17\lambda$

$-4\lambda^2 + 4\lambda$

$13\lambda - 13$

$\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$

reelle Lösungsbasis: $\{e^t, e^{2t}\cos(3t), \sin(3t)e^{2t}\}$

2) part Lsg d. inhom Glg.

Störfkt $18e^{2t}$ → Lsg hat Gestalt $t^v q e^{2t}$ $v = 0$, da 2 keine Vielfachheit

$e^{2t} = q e^{2t}(-13 + 34 - 20 + 8)$

$\boxed{q = \frac{1}{9}}$ $\varphi_{p_1} = 2e^{2t}$

Störfkt $-\sin 3t$ ~~Komplex~~ Lsg hat Gestalt $\alpha \sin(3t) + \beta \cos(3t) = \varphi_{p_2}$

da i und 3 kein EW

$-\sin 3t = -27\alpha\cos + 27\sin\beta + 45\alpha\sin + 45\beta\cos + 51\alpha\cos - 51\sin\beta - 13\alpha\sin - 13\beta\cos$

$\dot\varphi = 3\alpha\cos(3t) - 3\sin(3t)\beta$

$\ddot\varphi = -9\alpha\sin(3t) - 9\cos(3t)\beta$

$\dddot\varphi = -27\alpha\cos(3t) + 27\sin(3t)\beta$

$-\sin = \sin(+27\beta + 45\alpha - 51\beta - 13\alpha)$
$+ \cos(-27\alpha + 45\beta + 51\alpha - 13\beta)$

$-1 = -24\beta + 32\alpha$ → $-1 = -\frac{128}{3}\beta - \frac{72}{3}\alpha = -\frac{200}{3}\beta$

$0 = 24\alpha + 32\beta$ → $\alpha = -\frac{4}{3}\beta$ $\boxed{\beta = \frac{3}{200}}$

$\varphi_{p_2} = -\frac{1}{50}\sin(3t) + \frac{3}{200}\cos(3t)$ ⇒ $\boxed{\alpha = -\frac{1}{50}}$

Störfkt $26t$, Lsg der Gestalt $at + b = \varphi_{p_3}$

$26t = 17a - 13at - 13b$

• $26 = -13a$ ⇒ $\boxed{a = -2}$ $\varphi_{p_3} = -2t - \frac{34}{13}$

• $0 = -34 - 13b$ ⇒ $\boxed{b = -\frac{34}{13}}$

$$\boxed{\text{allg. Lsg: } \varphi = c_1 e^t + c_2 e^{2t}\cos(3t) + c_3 e^{2t}\sin(2t) + 2e^{2t} - \frac{1}{50}\sin(3t) + \frac{3}{200}\cos(3t) - 2t - \frac{34}{13}}$$

B 20.2) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+12) - \cancel{6} - \cancel{6} + 18 - 6\lambda + \cancel{12} - 3\lambda + 2 + 2\lambda =$$

$$= -\lambda^2 + \cancel{7\lambda} - 12 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda + 20 - \cancel{7\lambda}$$

$$= \underline{\underline{-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8}} \qquad \lambda_1 = 2$$

$$(-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8) : (\lambda-2) = -\lambda^2+4\lambda-4$$
$$\begin{array}{l} -\lambda^3+2\lambda^2 \\ \hline 4\lambda^2-12\lambda \\ 4\lambda^2-8\lambda \\ \hline -4\lambda+8 \\ \quad 0R \end{array}$$

$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{0}$

EW $= \{2\}$ 3-fach

$$(A-2E_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ER = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$\Rightarrow \exists$ 2 Jordan-Kästchen $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A-2E_3)^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow HR = [e_1, e_2, e_3]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W(t) = T \cdot e^{tJ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 2te^{2t}+e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2te^{2t} & 2e^{2t} \\ -2e^{2t} & -2te^{2t} & 0 \end{pmatrix}$$

allg. Lösung: $\varphi_h(t) = W(t) \cdot \vec{c} \qquad (\vec{c} \in \mathbb{R}^3)$

System: $\dot{x} = Ax + \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\stackrel{!}{=} b_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 0 \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}}_{\stackrel{!}{=} b_2}$

Gestalt einer part. Lsg des Systems $\dot{x} = Ax + b_1$:

$\varphi_1(t) = \sin t \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ (da i kein EW von A), $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$

Gestalt einer part. Lsg des Systems $\dot{x} = Ax + b_2$:

da 2 EW von $A \Rightarrow$ allg. Ansatz nicht möglich

Aber: $b_2 = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 0 \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} = \underset{\uparrow \text{ 1. Spalte v. } W(t)}{\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}} - \underset{\uparrow \text{ 3. Spalte v. } W(t)}{\begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}}$ dh RESONANZ!

Störfkt. ist selbst Lsg des hom. Systems.

eine Lsg ist: $\varphi_2(t) = t \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 3te^{2t} \\ 0 \\ -2te^{2t} \end{pmatrix}$

Gestalt einer part. Lsg des inhom. Systems mit Störfkt $b_1 + b_2$:

$\boxed{\varphi_p = \varphi_1 + \varphi_2}$

Q 1.2) qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$\dot{x} = 3x + y + 4z$

$\dot{y} = 5x - y + z$

$\dot{z} = 2x + 3y + z$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

char. Poly: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 5 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) + 2 + 60 + 8(1+\lambda) - 3(3-\lambda) - 5(1-\lambda) = -(3-\lambda)(1-\lambda^2) + 62 + 8 + 8\lambda - 9 + 3\lambda - 5 + 5\lambda =$

$= -3 + 3\lambda^2 + \lambda - \lambda^3 + 41 + 31\lambda =$

$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 17\lambda - 53$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 53 & 0 \\ -1 & 17 & 0 \\ 0 & 3 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ p_n & p_{n-2} & \vdots \\ 0 & p_{n-1} & \\ \vdots & p_n & \\ 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & p_4 \; p_2 \; p_0 \end{pmatrix}$$

Hauptminoren: $H_1 = 3$

$H_2 = 104$

$H_3 = 53 \cdot 51 + 53^2 = 53 \cdot 104 = 5512$

alle Hauptminoren $\neq 0 \Rightarrow \nexists$ rein imaginären NS, dh $Re(\lambda) \neq 0 \;\forall \lambda$

$\underset{p_n}{-1}, \underset{H_1}{3}, \frac{H_2}{H_1} = \frac{104}{3}, \frac{H_3}{H_2} = \frac{104 \cdot 53}{104} \rightarrow \underline{\underline{1}}$ Vorzeichenwechsel

$\Rightarrow \exists!$ NS mit pos Realteil

dh: $\boxed{Re\,\lambda_1 > 0 \;, Re(\lambda_2) < 0 \;, Re(\lambda_3) < 0}$

Sturm-Kette: $f_1 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 17\lambda + 53$

$f_2 =$ Abl. $f_1 = -3\lambda^2 + 6\lambda + 17$

$f_3 = -5\lambda - 22$

$f_4 = 1$

$f_1 : f_2 = (-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 17\lambda + 53) : (-3\lambda^2 + 6\lambda + 17) = \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}$

$\underline{-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{17}{3}\lambda}$

$0 \quad \lambda^2 \quad \frac{34}{3}\lambda + 53$

$\underline{\lambda^2 - 2\lambda - \frac{17}{3}}$

$0 \quad \frac{40}{3}\lambda + \frac{176}{3}$

$f_2 : f_3 = (-3\lambda^2 + 6\lambda + 17) : (-5\lambda - 22) = \frac{3}{5}\lambda - \frac{46}{25}$

$\underline{-3\lambda^2 - \frac{66}{5}\lambda}$

$0 \quad \frac{96}{5}\lambda + 17$

$\underline{\frac{96}{5} + \frac{22 \cdot 46}{25}}$

$0 \quad \frac{17 \cdot 25}{25} - \frac{22 \cdot 46}{25} < 0$

BRUNNEN

$$I_0^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = V(0) - V(\infty) = 2 - 1 = \boxed{1}$$

$$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = V(-\infty) - V(0) = 2 - 2 = \boxed{0}$$

$V(0)$	+	+	−	+	2
$V(\infty)$	−	−	−	+	1
$V(-\infty)$	+	−	+	+	2

$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(\lambda_2) + 0 + \mathrm{Im}(\lambda_3)$

$\Rightarrow$ 1) zu λ_1 gehörige Lsg $\varphi(t) \xrightarrow{t\to\infty} \pm\infty$

2) zu $\lambda_{2,3}$ — " — $\varphi(t) \xrightarrow{t\to\infty} \vec{0}$ Überlagerung v. sin-cos Schwingungen mit exponentiell fallender Amplitude

$$\left(\begin{array}{l} \text{Q 16.3) siehe 1.2} \\ \text{17.2) siehe 6.4 (kleiner Angabefehler)} \\ \text{18.3) = 3.2 (andere Störfunktion)} \\ \text{19.3) = 3.2} \\ \text{25.3) = 14.2} \end{array}\right)$$

3.2) $\dot{x} = x + 4y + 2$

$\dot{y} = -3x - 5y + z$

$\dot{z} = x + 2y - 3z$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ -3 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (5 - 6\lambda + \lambda^2)(-3-\lambda) + 4 - 12 + (0 + 2\lambda - 2 + 2\lambda - 36 - 12\lambda =$$

$$= -15 + 18\lambda - 3\lambda^2 - 5\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 68 - 8\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda - 71$$

Hurwitz: $\begin{pmatrix} 3 & -71 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -71 \end{pmatrix}$ $\quad H_1 = 3$, $H_2 = -56$, $H_3 = 71 \cdot 56$ $\quad \neq 0 \Rightarrow \nexists$ EW mit $Re = 0$

Folge $-1, 3, -\frac{56}{3}, 71$ $\quad$ 2 VZW

$Re(\lambda_1) < 0$, $Re(\lambda_2) > 0$

~~EW haben Re > 0~~

Sturm-Kette: $f_1: -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda - 71$

$f_2: -3\lambda^2 + 6\lambda + 5$

$f_3: -\frac{16}{3}\lambda + \frac{208}{3} = -\lambda + 13$

$f_4 := 1$

$(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda - 71) : (-3\lambda^2 + 6\lambda + 5) = \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}$

$\underline{-3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda}$

$\lambda^2 + \frac{10}{3}\lambda - 71$

$\underline{\lambda^2 - 2\lambda - \frac{5}{3}}$

$\frac{16}{3}\lambda - \frac{208}{3}$

$V(-\infty) = + - + + \quad \leadsto 2$

$V(0) = - + + + \quad \leadsto 1$

$V(\infty) = - - - + \quad \leadsto 1$

$(-3\lambda^2 + 6\lambda + 5) : (-\lambda + 13) = 3\lambda + 33$

$\underline{-3\lambda^2 + 39\lambda}$

$-33\lambda + 5$

$\underline{-33\lambda + 33 \cdot 13}$

-424

$\left[I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2 - 1 = 1 \right] \Rightarrow \lambda_1 < 0$

$I_0^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3}$ konj. komplex

1) zu λ_1 geh. Lsg $\varphi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \vec{0}$ exp.

2) zu $\lambda_{2,3}$ geh. Lsg $\varphi(t)$ unbeschränkt für $t \to \infty$ mit Überlagerung von Sin- und Cosinusschwingungen (mit exp. wachsender Amplitude)

Q4.3) $\dot{x} = w+x+y+3z$
$\dot{y} = 2x+2y-4z$
$\dot{z} = -x-y+3z$
$\dot{w} = w+2x-y-2z$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} (1-\lambda)\Big((2-3\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)+4-6+6-3\lambda - 4+4\lambda+6+2\lambda\Big)$$

$$-\left(\cancel{12}-10\lambda+2\lambda^2 \cancel{-4}+\cancel{4}-\cancel{4}+\cancel{2\lambda}\cancel{-8}+6\cancel{-2\lambda}\right)=$$

$$=(1-\lambda)\left(-2\lambda-9\lambda+3\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3+6\lambda\right)-\left(2\lambda^2-10\lambda+6\right)$$

$$(1-\lambda)\left(6\lambda^2-\lambda^3-8\lambda\right)+\left(-2\lambda^2+10\lambda-6\right)=$$

$$=-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda+\lambda^4-6\lambda^3+8\lambda^2-2\lambda^2+10\lambda-6=$$

$$=\underline{\lambda^4-7\lambda^3+12\lambda^2+2\lambda-6}$$

Hurwitz: $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & -6 \end{pmatrix}$ $H_1=-7$, $H_2=-86$, $H_3=122$, $H_4=-6\cdot 122$ $\quad H_i \neq 0 \quad i=1..4 \Rightarrow \nexists$ EW mit Re $=0$

Folge: $1, -7, \frac{86}{7}, -\frac{122}{86}, -6$ 3VZW

$\Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_{1,2,3})>0$, $\mathrm{Re}(\lambda_4)<0$

Sturm-Kette: $f_1: \lambda^4-7\lambda^3+12\lambda^2+2\lambda-6$

$f_2: 4\lambda^3-21\lambda^2+24\lambda+2$

$f_3: 51\lambda^2-192\lambda+82$

f_4: ~~1311 λ 1878~~ 6189λ −15024
3910λ − 9390

$f_5: +1$

Richtig!

$V(-\infty)= + - + + +\ \rightsquigarrow 4$

$V(0)= - + + - +\ \rightsquigarrow 3$

$V(\infty)= + + + + +\ \rightsquigarrow 0$

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 3-2=1$ $\quad 4-3=1 \Rightarrow \mathrm{Im}(\lambda_4)=0$

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2-1=1$ $\quad 3-0=3 \Rightarrow \mathrm{Im}(\lambda_{1,2,3})=0$

~~$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\lambda_1=0$, $\mathrm{Im}\,\lambda_{2,3}\neq 0$~~

$(\lambda^4-7\lambda^3+12\lambda^2+2\lambda-6):(4\lambda^3-21\lambda^2+24\lambda+2)=\frac{1}{4}\lambda-\frac{7}{16}$

$\lambda^4-\frac{21}{4}\lambda^3+6\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda$

$-\frac{7}{4}\lambda^3+6\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda-6$

$-\frac{7}{4}\lambda^3+\frac{147}{16}\lambda^2-\frac{168}{16}\lambda-\frac{14}{16}$

$-\frac{51}{16}\lambda^2+\frac{192}{16}\lambda-\frac{82}{16}$

$(4\lambda^3-21\lambda^2+24\lambda+2):(51\lambda^2-192\lambda+82)=\frac{4}{51}\lambda-\frac{303}{51^2}$

$4\lambda^3-\frac{768}{51}\lambda^2+\frac{328}{51}\lambda$

$-\frac{303}{51}\lambda^2+\frac{1552}{51}\lambda+2$

Fehler

$-\frac{303}{51}\lambda^2+\frac{58176}{51^2}\lambda-\frac{24846}{51^2}$

$\frac{20976}{51^2}\lambda+\frac{30048}{51^2}$

$(51\lambda^2-192\lambda+82):(-1311\lambda-1878)=\frac{51}{1311}\lambda+\frac{347490}{1311^2}$

$51\lambda^2+\frac{95778}{1311}\lambda$

$-\frac{347490}{1311}\lambda+82$

$-\frac{347490}{1311}\lambda-\frac{652586220}{1311^2}$

$\frac{793521342}{1311^2}>0$

$(4\lambda^3-21\lambda^2+24\lambda+2):(51\lambda^2-192\lambda+82)=\frac{4}{51}\lambda-\frac{303}{51^2}$

$4\lambda^3-\frac{768}{51}\lambda^2+\frac{328}{51}\lambda$

$-\frac{303}{51}\lambda^2+\frac{898}{51}\lambda+2$

$-\frac{303}{51}\lambda^2+\frac{58176}{51^2}\lambda-\frac{24846}{51^2}$

Fehler ← $\frac{12378}{51^2}\lambda+\frac{30048}{51^2}$

$(51\lambda^2-192\lambda+82):(6189\lambda-15024)=\frac{51}{6189}\lambda-\frac{422064}{6189^2}$

$51\lambda^2-\frac{766224}{6189}\lambda$

$-\frac{422064}{6189}\lambda+82$

$-\frac{422064}{6189}\lambda+\frac{6341089536}{6189^2}$

$-\frac{3200184414}{6189^2}<0$

Lsg zu $\lambda_{1,2,3}$ unbeschränkt ggf. $\pm\infty$, da kein ...
Lsg zu λ_4 exponentiell gegen 0, ...

Q 22.3) $\dot{x} = x + 3y - 2z$

$\dot{y} = x - 2y + 4z$

$\dot{z} = x - y - 2z$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 (1-\lambda) + 12 + 2 + 2(-2-\lambda) + 4(1-\lambda) - 3(-2-\lambda) =$$

$$= \cancel{4} + 4\lambda + \lambda^2 - \cancel{4\lambda} - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 14 - \cancel{4} - 2\lambda + 4 - 4\lambda + 6 + 3\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 24$$

$$\text{Hurwitz-Matrix} = \begin{pmatrix} -3 & 24 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 24 \end{pmatrix}$$

$M_1 = -3$

$M_2 = \cancel{\ldots}\ 33$

$M_3 = 9 \cdot 24 + 24^2 = 24(9 \cdot 24) > 0$

$-1, -3, -11, >0 \Rightarrow 1$ VZW

•) alle $M_k \neq 0 \Rightarrow \nexists$ EW mit $Re(\lambda) = 0$

•) $\exists!$ EW λ_1 mit $Re(\lambda_1) > 0$, $\exists 2$ EW λ_2, λ_3 mit $Re(\lambda_i) < 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_{2,3}$ konj. kompl.?

Sturm-Kette: $f_1 := -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 24$

$f_2 := -3\lambda^2 - 6\lambda - 3$

$f_3 := -1$

$$(-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 24) : (-3\lambda^2 - 6\lambda - 3) = \tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{3}$$
$$\underline{-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda}$$
$$-\lambda^2 - 2\lambda + 24$$
$$\underline{-\lambda^2 - 2\lambda - 1}$$
$$0 \quad 0 \quad 25 \text{ R.}$$

$V(-\infty) = + - - \rightsquigarrow 1$

$V(0) = + - - \rightsquigarrow 1$

$[V(\infty) = - - - \rightsquigarrow 0$

$$\Rightarrow I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = V(-\infty) - V(0) = 1 - 1 = 0$$

$$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = V(0) - V(\infty) = 1 - 0 = 1 \checkmark]$$

$\Rightarrow Im(\lambda_2) \neq 0$

$\neq Im(\lambda_3)$

Qual. Analyse: 1) für zu λ_1 gehörige Lsg $\varphi(t)$ gilt: $\varphi(t)$ unbeschränkt für $t \to \infty$ (exp.)

2) für zu $\lambda_{2,3}$ – " – $\varphi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \vec{0}$ (Überlagerung v. sin- u. cos-Schwingungen mit expo. fallender Amplitude)

Q 52) $\dot{x} = 2x + 5y - 3z$

$\dot{y} = 6x + y + 2z$

$\dot{z} = 3x - 4y - z$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 6 & 1 & 2\\ 3 & -4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 5 & -3\\ 6 & 1-\lambda & 2\\ 3 & -4 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)+30+72+9-9\lambda+16-8\lambda+30+30\lambda =$$

$$= (-2+\lambda)(1-\lambda^2)+111-9\lambda+16+22\lambda+30 =$$

$$= \cancel{-2+2\lambda^2+\lambda-\lambda^3+163+13\lambda = -\lambda^3+2\lambda^2+14\lambda+165}$$

$$-2+2\lambda^2+\lambda-\lambda^3+157+13\lambda$$

$$= \underline{\underline{-\lambda^3+2\lambda^2+14\lambda+155}}$$

Hurwitz-M: $\begin{pmatrix}2 & 155 & 0\\ -1 & 14 & 0\\ 0 & 2 & 155\end{pmatrix}$ $\quad M_1 = 2$, $\quad M_2 = 28+155 > 0$, $\quad M_3 = 28\cdot 155 + 155^2 > 0$

$M_{1-3} > 0 \Rightarrow \cdot)\ \nexists$ EW mit $Re(\lambda) = 0$

$-1, 2, \frac{183}{2}, > 0 \Rightarrow 1$ VZW $\Rightarrow \cdot)\ \exists!$ EW mit $Re(\lambda_1) > 0$

$\Rightarrow \boxed{Re(\lambda_1) > 0,\ Re(\lambda_{2,3}) < 0}$

Sturm-Kette: $f_1: -\lambda^3+2\lambda^2+14\lambda+155$

$f_2: -3\lambda^2+4\lambda+14$

$f_3: -92\lambda - 1423$

$f_4: -1$

$f_1 : f_2$ $\quad (-\lambda^3+2\lambda^2+14\lambda+155) : (-3\lambda^2+4\lambda+14) = \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{9}$

$-\lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 + \frac{14}{3}\lambda$

$\frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{28}{3}\lambda + 155$

$\frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{8}{9}\lambda - \frac{28}{9}$

$\frac{92}{9}\lambda + \frac{1423}{9}$

$f_2 : f_3 = (-3\lambda^2+4\lambda+14) : (-92\lambda - 1423) = +\frac{3}{92}\lambda + \frac{3901}{92^2}$

$-3\lambda^2 - \frac{4269}{92}\lambda + 14$

Rest

$-\frac{3901}{92}\lambda + 14$

$-\frac{3901}{92}\lambda$

> 0 Rest

$V(-\infty) = + - + - \rightsquigarrow 3$

$V(0) = + + - - \rightsquigarrow 1$

$V(\infty)\ - - - - \rightsquigarrow 0$

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = V_{-\infty} - V_0 = 3 - 1 = \boxed{2}$ $\Rightarrow$ alle auf reeller Achse

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = V_0 - V_\infty = 1 - 0 = \boxed{1}$

$\Rightarrow$ die zu λ_1 geh. Lsg $\varphi(t) \xrightarrow{t\to\infty} \pm\infty$ exponentiell

die zu $\lambda_{2,3}$ geh. Lsg $\varphi(t) \xrightarrow{t\to\infty} \vec{0}$ exponentiell

Q 6.4) $x^{(5)} + x^{(4)} - x^{(3)} + 2\ddot{x} - 3\dot{x} = 0$

$y := \ddot{x}$
$z := \dddot{x}$

~~$\dot{z} + z - \dot{y} + 2y - 3\dot{x} = 0$~~

$\lambda^5 + \lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad | : \lambda \qquad \lambda_4 = 0$

$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda_5 = 1$

$(\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 3) : (\lambda - 1) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$

$\underline{\lambda^4 - \lambda^3}$
$2\lambda^3 - \lambda^2$
$\underline{2\lambda^3 - 2\lambda^2}$
$\lambda^2 + 2\lambda$
$\underline{\lambda^2 - \lambda}$
$3\lambda - 3$
0 R.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_1 = 2, \; M_2 = -1, \; M_3 = 6 - 9 = -3$

kein rein imag. EW

Folge $1, 2, -\frac{1}{2}, 3$ 2VZW

$\Rightarrow Re(\lambda_1) < 0, \; Re(\lambda_{2,3}) > 0$

Sturm-Kette: $f_1 := \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 3$

$f_2 := 3\lambda^2 + 4\lambda + 1$

$f_3 := 2\lambda - 25$

$f_4 := -1$

$(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 3) : (3\lambda^2 + 4\lambda + 1) = \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}$

$\underline{\lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda}$
$\frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{6}{9}\lambda + 3$
$\underline{\frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{8}{9}\lambda + \frac{2}{9}}$
$-\frac{2}{9}\lambda + \frac{25}{9}$ R

$(3\lambda^2 + 4\lambda + 1) : (2\lambda - 25) = \frac{3}{2}\lambda + \frac{83}{4}$

$\underline{3\lambda^2 - \frac{75}{2}\lambda}$
$\frac{83}{2}\lambda + 1$
$\underline{\frac{83}{2}\lambda - \frac{25 \cdot 83}{4}}$
0 >0 Rest

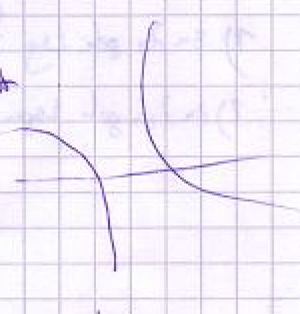
$V(-\infty) = - + - - \quad \rightsquigarrow 2$

$V(0) = + + - - \quad \rightsquigarrow 1$

$V(\infty) = + + + - \quad \rightsquigarrow 1$

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow Im(\lambda_1) = 0$

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow Im(\lambda_{1,3}) \neq 0$



1) λ_1 Lsg $\varphi(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$ exp., ob lokal monoton

2) λ_{23} Lsgn $\varphi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \pm\infty$ Überlagerung von sin- und cos-Schwingungen mit exp. wachsender Amplitude.

3) λ_4 konstante Lösung

4) λ_5 : $\lim_{t \to \infty} \lambda_5 = \pm\infty$ exponentiell.

Q 9.2) $\dot{x} = 2x + y + 3z$
$\dot{y} = 5x - y + 6z$
$\dot{z} = -4x + 2y + z$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 5 & -1-\lambda & 6 \\ -4 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) - 24 + 30 + 12(-1-\lambda) - 12(2-\lambda) - 5(1-\lambda) =$$

$$= (\lambda-2)(1-\lambda^2) + 6 - 12 - \cancel{12\lambda} - 24 + \cancel{12}\lambda - 5 + 5\lambda =$$

$$= \lambda - \lambda^3 - 2 + 2\lambda^2 - 6 - 24 + 5\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda - 37$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -37 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -37 \end{pmatrix}$$

$M_1 = 2$
$M_2 = -25$
$M_3 = -439 + 37^2 = 37 \cdot 25$

alle $\neq 0 \Rightarrow$ keine EW auf im. Achse

Folge: $-1, 2, -\frac{25}{2}, -37$ 2VZW $Re(\lambda_1) < 0$, $Re(\lambda_{2,3}) > 0$

Sturm-Kette: $f_1 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda - 37$

$f_2 = -3\lambda^2 + 4\lambda + 6$

$f_3 = -44\lambda + 321$

$f_4 = 1$

$(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda - 37) : (-3\lambda^2 + 4\lambda + 6) = \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{9}$

$\underline{-\lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 + 2\lambda}$

$\frac{2}{3}\lambda^2 + 4\lambda - 37$

$\underline{\frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{8}{9}\lambda - \frac{4}{3}}$

$\frac{44}{9}\lambda - \frac{107}{3}$

$V(-\infty)$: $+ \; - \; + \; +$ $\rightsquigarrow 2$

$V(0)$: $- \; + \; + \; +$ $\rightsquigarrow 1$

$V(\infty)$: $- \; - \; \cancel{+} - \; +$ $\rightsquigarrow 1$

$(-3\lambda^2 + 4\lambda + 6) : (-44\lambda + 321) = +\frac{3}{44}\lambda + \frac{787}{44^2}$

$\cancel{-3\lambda^2 + \frac{963}{44}\lambda}$

$\cancel{-\frac{787}{44}\lambda + 6}$

$\cancel{-\frac{787}{44}\lambda + \frac{321 \cdot 787}{44^2}}$

Rest < 0

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2 - 1 = \boxed{+1} \Rightarrow Im(\lambda_1) = 0$

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 1 - 1 = \boxed{0} \Rightarrow Im(\lambda_{2,3}) \neq 0$

$-3\lambda^2 + \frac{963}{44}\lambda$

$-\frac{787}{44}\lambda + 6$

$\underline{-\frac{787}{44}\lambda + \frac{321 \cdot 787}{44^2}}$

Rest < 0

1) zu λ_1 geh. Lsg $\xrightarrow{t \to \infty}$ 0 exp.

2) zu $\lambda_{2,3}$ geh Lsgn $\xrightarrow{t \to \infty} \pm\infty$ sin, cos Schwingungen

Q 10.3)

$$\dot w = w + x + y + 3z$$
$$\dot x = 2x + 2y - 4z$$
$$\dot y = -x - y + 3z$$
$$\dot z = w + 2x - y - 2z$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ -1 & -1-\lambda & 3 \\ 2 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2-\lambda & 2 & -4 \\ -1 & -1-\lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left((4-\lambda^2)(1+\lambda) + \cancel{12-4-8} - 8\lambda + 6 - 3\lambda - 4 - 2\lambda\right) + 6 + \cancel{4} + 3(2-\lambda)(-1-\lambda) + \cancel{6} - \cancel{4} - 4\lambda \ldots$$

$$(1-\lambda)(4 + 4\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - 13\lambda + 2) + 6 - \lambda + 3(\lambda^2 - \lambda - 2) =$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 6) + \cancel{6} - \lambda + 3\lambda^2 - 3\lambda - \cancel{6} =$$

$$\cancel{= -\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 6 + \lambda^4 + \lambda^3 + 17\lambda - 6\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda =}$$

$$\cancel{= + \lambda^4 + \ldots + 2\lambda^2 - 2\lambda + 6}$$

$$-\cancel{\lambda^3} - \lambda^2 - 9\lambda + 6 + \lambda^4 + \cancel{\lambda^3} + 9\lambda^2 - 6\lambda + \cancel{6} - \lambda + 3\lambda^2 - 3\lambda - \cancel{6}$$

$$\underline{\lambda^4 + 11\lambda^2 - 19\lambda + 6} \qquad \lambda_1 = 1$$

$$\cancel{(\lambda^4 + 11\lambda^2 - 19\lambda + 6) : (\lambda - 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + 12\lambda - 7}$$

Hurwitz:
$$\begin{pmatrix} 0 & -19 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$H_1 = 0$
$H_2 = 19$
$H_3 = -361$
$H_4 = -6 \cdot 361$

$H_1 \ldots H_p = 0$ Rest $\neq 0 \Rightarrow p$ ungerade ✓

$$\begin{pmatrix} 0 & -19 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

← ungerade Zeilennummer (1)

← ungerade Zeilennummer (3)

$$p^*(\lambda) = \lambda^4 + \varepsilon\lambda^3 + 11\lambda^2 - 19\lambda + 6$$

richtig $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 11\lambda + 6$

$$\begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$H_1 = 0$
$H_2 = 11$
$H_3 = -121$
$H_4 = -6 \cdot 121$

ersetze a_3 durch ε: $p^* = \lambda^4 + \varepsilon\lambda^3 + 5\lambda^2 - 11\lambda + 6$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & -11 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$H_1^* = \varepsilon$
$H_2^* = 5\varepsilon + 11$
$H_3^* = -55\varepsilon - 6\varepsilon^2 - 121$
$H_4^* = 6 \cdot H_3$

für kleine $\varepsilon > 0$ ist keine Hauptminore 0.

eigentlich alte M_2, M_3, M_4 verwenden.

$1,\ \varepsilon,\ \frac{5\varepsilon+11}{\varepsilon},\ -\frac{-55\varepsilon+6\varepsilon^2+121}{5\varepsilon+11},\ 6$ 2 Vorzeichenwechsel

$Re(\lambda_{1,2}) > 0, \quad Re(\lambda_{3,4}) < 0$

Sturm-Kette: $f_1 := \lambda^4 + 5\lambda^2 - 11\lambda + 6$

$f_2 := 4\lambda^3 + 10\lambda - 11$

$f_3 := -10\lambda^2 + 33\lambda - 24$

$f_4 := -1099\lambda + 1067$

$f_5 := 1$

$(\lambda^4 + 5\lambda^2 - 11\lambda + 6) : (4\lambda^3 + 10\lambda - 11) = \frac{1}{4}\lambda$

$\lambda^4 + \frac{5}{2}\lambda^2 - \frac{11}{4}\lambda$

$+\frac{5}{2}\lambda^2 - \frac{33}{4}\lambda + 6$

$-\frac{33}{25}$

$(4\lambda^3 + 10\lambda - 11) : (-10\lambda^2 + 33\lambda - 24) = -\frac{2}{5}\lambda - \frac{66}{50}$

$4\lambda^3 - \frac{66\lambda^2}{5} + \frac{48}{5}\lambda$

$\frac{66\lambda^2}{5} + \frac{2}{5}\lambda - 11$

$\frac{66\lambda^2}{5} - \frac{33^2\lambda}{25} + \frac{33\cdot 24}{25}$

$0 \quad \frac{1099}{25}\lambda - \frac{1067}{25}$

$V(-\infty) = + - - + + \rightsquigarrow 2$

$V(0) = + - - + + \rightsquigarrow 2$

$V(\infty) = + + - - + \rightsquigarrow 2$

$(-10\lambda^2 + 33\lambda - 24) : (-1099\lambda + 1067) = \frac{10\lambda}{1099} - \frac{25597}{1099^2}$

$-10\lambda^2 + \frac{10670\lambda}{1099}$

$\frac{25597}{1099}\lambda - 24$

$\frac{25597\lambda}{1099} - \frac{1067\cdot 25597}{1099^2}$

$-1{,}3\ R.$

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2-2 = 0 \quad \Rightarrow Im(\lambda_{3,4}) \neq 0$

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2-2 = 0 \quad \Rightarrow Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$

Lösungen $(\lambda_{1,2}) \rightarrow \pm\infty$, sin-cos Schw. mit exp. wachsender Amplitude

Lösungen $(\lambda_{3,4}) \rightarrow 0$, " " " fallender "

Q 13.3) $\dot{x} = 4x + 2y + 3z$

$\dot{y} = -2x + z$

$\dot{z} = 2x - 3y + z$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-4\lambda+\lambda^2)(1-\lambda) + 4 + 18 + 6\lambda + 12 + 3\lambda + 4 - 4\lambda =$$

$$= -4\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 + 22 - \lambda + 16 =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 38$$

Hurwitz: $\begin{pmatrix} 5 & 38 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 38 \end{pmatrix}$ $M_1 = 5$, $M_2 = 13$, $M_3 = 38 \cdot 13$

Folge $-1, 5, \frac{13}{5}, 38$

1 VZW

•) alle $H_n \neq 0 \Rightarrow \nexists$ rein imag. EW.

•) $\exists!\ \lambda_1$ mit $Re(\lambda_1) > 0 \Rightarrow Re(\lambda_{2,3}) < 0$

Sturm-Kette: $f_1 := -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 38$

$f_2 := -3\lambda^2 + 10\lambda - 5$

$f_3 := -20\lambda - 317$

$f_4 := -1$

$(-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 38) : (-3\lambda^2 + 10\lambda - 5) = \frac{1}{3}\lambda - \frac{5}{9}$

$-\lambda^3 + \frac{10}{3}\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda$

$\frac{5}{3}\lambda^2 - \frac{10}{3}\lambda + 38$

$\frac{5}{3}\lambda^2 - \frac{50}{9}\lambda + \frac{25}{9}$

$\frac{20}{9}\lambda + \frac{317}{9}$

$(-3\lambda^2 + 10\lambda - 5) : (-20\lambda - 317) = \frac{3}{20}\lambda - \frac{1151}{400}$

$-3\lambda^2 - \frac{951}{20}\lambda$

$\frac{1151}{20}\lambda - 5$

$\frac{1151}{20}\lambda + \frac{364867}{400}$

$907{,}1675 > 0$

$V(-\infty) = + - + - \rightsquigarrow 3$

$V(0) = + - - - \rightsquigarrow 1$

$V(\infty) = - - - - \rightsquigarrow 0$

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 3 - 1 = \boxed{2} \Rightarrow Im(\lambda_{2,3}) = 0$

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 1 - 0 = \boxed{1} \Rightarrow Im(\lambda_1) = 0$

die zu λ_1 gehörige Lsg $\varphi(t)$ wächst bei $t \to \infty$ exponentiell gegen $\pm\infty$

-"- $\lambda_{2,3}$ -"- -"- -"- 0

Q (14.2) $\dot{x} = 3x + y + 5z$

$\dot{y} = 4x + 2y + 3z$

$\dot{z} = x + 6y + z$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 5 \\ 4 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (6-5\lambda+\lambda^2)(1-\lambda) + 3 + 120$$

$-10 + 5\lambda - 54 + 18\lambda - 4 + 4\lambda =$

$$= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 6\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 + 27\lambda + 55 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 16\lambda + 61$$

Hurwitz: $\begin{pmatrix} 6 & 61 & 0 \\ -1 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 61 \end{pmatrix}$

$H_1 = 6$

$H_2 = 157$

$H_3 = 61 \cdot 157$

Folge $-1, 6, \frac{157}{6}, 61$ 1 VZW

$\Rightarrow \nexists$ EW mit $Re(\lambda) = 0$

$\exists!$ EW mit $Re(\lambda_1) > 0$, $Re(\lambda_{2,3}) < 0$

Sturm-Kette:

$f_1 : -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 16\lambda + 61$

$f_2 : -3\lambda^2 + 12\lambda + 16$

$f_3 : -56\lambda - 215$

$f_4 : 1$

$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 16\lambda + 61) : (-3\lambda^2 + 12\lambda + 16) = \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}$

$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + \frac{16}{3}\lambda$

$2\lambda^2 + \frac{32}{3}\lambda + 61$

$2\lambda^2 - \frac{24}{3}\lambda - \frac{32}{3}$

$\frac{56}{3}\lambda + \frac{215}{3}$

$(-3\lambda^2 + 12\lambda + 16) : (-56\lambda - 215) = \frac{3}{56}\lambda - \frac{1317}{56^2}$

$-3\lambda^2 - \frac{645}{56}\lambda$

$\frac{1317}{56}\lambda + 16$

$\frac{1317}{56}\lambda + \frac{283155}{56^2}$

$\frac{-232979}{56^2}$

$V(-\infty) = + - + + \rightsquigarrow \boxed{2}$

$V(0) = + + - + \rightsquigarrow \boxed{2}$

$V(+\infty) = - - - + \rightsquigarrow \boxed{1}$

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2 - 2 = \underline{0} \Rightarrow Im(\lambda_{2,3}) \neq 0$

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2 - 1 = \underline{1} \Rightarrow Im(\lambda_1) = 0$

die zu λ_1 geh Lsg φ exp. gg $\pm\infty$, ob Index monoton

$\lambda_{2,3}$ mit sin, cos-Schwingungen ~~ob Index monoton~~ gg 0.

Q 24.2) $x^{(4)} + 2x^{(3)} - \ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$

$\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = 2$
$M_2 = -3$
$M_3 = -11$
$M_4 = -22$

$\Rightarrow \nexists$ rein imag. EW.

Folge: $1, 2, -\frac{3}{2}, \frac{11}{3}, 2$ $\rightarrow$ 2 VZW

2 EW mit Re > 0
$\lambda_{3,4}$: Re < 0

$f_1 := \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 2$

$f_2 := 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 2\lambda + 1$

$f_3 := 10\lambda^2 - 8\lambda - 15$

$f_4 := -568\lambda - 740$
$\quad -142\lambda - 185$

$f_5 := -1$

$(\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 2) : (4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{8}$
$\underline{\lambda^4 + \frac{3}{2}\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda}$
$\frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + 2$
$\underline{\frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{8}}$
$-\frac{5}{4}\lambda^2 + \lambda + \frac{15}{8}$

$(4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 2\lambda + 1) : (10\lambda^2 - 8\lambda - 15) = \frac{2}{5}\lambda + \frac{46}{50}$
$\underline{4\lambda^3 - \frac{16}{5}\lambda^2 - 6\lambda}$
$\frac{46}{5}\lambda^2 + 4\lambda + 1$
$\underline{\frac{46}{5}\lambda^2 - \frac{4 \cdot 46}{25}\lambda - \frac{3 \cdot 46}{10}}$
$0 \quad \frac{284}{25}\lambda + \frac{148}{10}$

$(10\lambda^2 - 8\lambda - 15) : (-142\lambda - 185) = -\frac{10}{142}\lambda + \frac{2986}{142^2}$
$\underline{10\lambda^2 + \frac{1850}{142}\lambda}$
$-\frac{2986}{142}\lambda - 15$
$\underline{-\frac{2986}{142}\lambda - \frac{552410}{142^2}}$
$\frac{249.450}{142^2}$

$V(-\infty) = + - + + - \quad \rightsquigarrow 3$

$V(0) = + + - - - \quad \rightsquigarrow 1$

$V(\infty) = + + + - - \quad \rightsquigarrow 1$

$I_{-\infty}^{0}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 3 - 1 = \boxed{2} \rightarrow \text{Im}(\lambda_{3,4}) = 0$

$I_{0}^{\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 1 - 1 = \boxed{0} \rightarrow \text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$

$\lambda_{1,2}$ Lsg $\rightarrow \pm\infty$ sin-cos Schw.

$\lambda_{3,4}$ Lsg $\rightarrow 0$ exp.

(S 1.3) Stab d. Null-Lsg: $\dot{x} = (x-y)(x^4+y^4-xy-1)$

$\dot{y} = (3x+4y)(x^4+y^4-xy-1)$

Ansatz: $V(x,y) := ax^2 + by^2 \qquad a,b \in \mathbb{R}$

$\dot{V}(x,y) = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \dot{y} = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} =$

$= (x^4+y^4-xy-1)\big(2ax(x-y) + 2by(3x+4y)\big) =$

$= (x^4+y^4-xy-1)\big(2ax^2 + 8by^2 + xy(6b-2a)\big)$

$6b - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 3b$

$a := 1, \; b := \frac{1}{3}$

a) $V(t,0,0) = 0 \qquad \forall t$ ✓

b) $V(t,x,y) = x^2 + \frac{y^2}{3}$; pos. def auf $\overline{S(a,\sigma)}$ ✓

c) $\dot{V}(t,x,y) = (x^4+y^4-xy-1)\underbrace{\left(2x^2+\frac{8}{3}y^2\right)}_{>0} < 0 \quad , \forall (x,y) \in \overline{K_\sigma(0,0)}$ $= \overline{S(0,\sigma)}$

für kleines σ neg. def

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} V(t,x,y) = 0$ glm bez. $t \in [0,\infty)$ ✓

$\rightarrow$ 0-Lösung ist asymptotisch stabil.

$\overline{S(a,\sigma)} = [a,\infty) \times \overline{K_\sigma(0,0)}$

(5) 2.3) $\dot{x} = x^2y^3 - \frac{x}{t}$

$\dot{y} = -tx^3y^2 - e^t y$

$V(t,x,y) := tx^2 + y^2$ $\qquad \dot{V}(t,x,y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\dot{y} =$

$$= x^2 + 2tx\left(x^2y^3 - \frac{x}{t}\right) + 2y\left(-tx^3y^2 - e^t y\right)$$

$$= x^2 \cancel{+ 2tx^3y^3} - 2x^2 \cancel{- 2tx^3y^3} - 2e^t y^2$$

$$= -x^2 - 2e^t y^2$$

1) $V(t,0,0) = 0$ ✓

2) $V(t,x,y)$ pos def auf $U_\delta(0,0)$ für $t \geq 0$ ✓

3) $\dot{V}(t,x,y)$ neg. def $\qquad \forall x,y,t$ ✓

nicht glm konv $\qquad (\|\binom{x}{y}\| < \delta \Rightarrow \dot{V}(t,x,y) < \varepsilon$ gilt's nicht, da t beliebig groß gewählt werden kann)

$\Rightarrow$ Null-Lösung des Systems ist stabil auf $[a,\infty)$ $\forall a > 0$

S4.4) $\dot{x} = (x-y)(2x^2+y^2-1)$ $\quad V(x,y) = ax^2+by^2$

$\dot{y} = (2x+y)(2x^2+y^2-1)$

$$\dot{V}(x,y) = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2ax\dot{x}+2by\dot{y}$$

$$= (2x^2+y^2-1)\left(2ax^2+2by^2+xy(4b-2a)\right)$$

$4b-2a=0 \Leftrightarrow b=\frac{a}{2}$

wähle $a=1$, $b=\frac{1}{2}$

a) $V(0,0)=0$ ✓

b) $V(x,y) = x^2+\frac{1}{2}y^2$ ist pos. def auf $\overline{K_\sigma(0,0)}$ ✓ $\quad \forall t \geq a > 0$

c) $\dot{V}(x,y) = (2x^2+y^2-1)(2x^2+y^2) < 0 \quad \forall (x,y) \in \overline{K_\sigma(0,0)} \quad \forall t \geq a > 0$

≥ 0

für σ hinr. klein.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} V(x,y) = 0$ glm bez $t \in (0,\infty)$ ✓

$\rightarrow$ 0-Lösung ist asymptotisch stabil auf $[a,\infty)$ $\forall a>0$

S 5.4) später, Lösung von Hochschulerschaft

S 8.3) $\dot{x} = (3x-4y)(x^2+5y^2-2)$ $\qquad V(x,y) = ax^2+by^2$

$\dot{y} = (x+6y)(x^2+5y^2-2)$

$$\dot{V}(x,y) = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} =$$

$$= (x^2+5y^2-2)\left(6ax^2+12by^2+xy(2b-8a)\right) \qquad b = 4a$$

$\Rightarrow a = 1,\ b = 4$

a) $V(0,0) = 0$ ✓

b) $V(x,y) = x^2+4y^2$ pos. def. ✓

c) $\dot{V}(x,y) = (x^2+5y^2-2)(\underbrace{6x^2+48y^2}_{>0})$ neg def auf $\overline{K_r(0,0)}$ für r hinr. klein ✓

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} V(x,y) = 0$ glm bezüglich $t \in (0,\infty)$

$\Rightarrow$ Null-Lösung ist asymptotisch stabil auf $[a,\infty)$ $a>0$

S 10.4) $\dot{x} = (3e^t x - y)(x^2+3y^2-6)$ $\quad V(x,y) = ax^2+y^2$

$\dot{y} = (x+6e^t y)(x^2+3y^2-6)$ $\quad \dot{V} = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + 2ax\dot{x} + 2y\dot{y}$

$(x^2+3y^2-6)(6ax^2e^t + 12y^2e^t + 2xy(1-a))$ wähle $a=1$

a) $V(0,0) = 0$ ✓

b) $V(x,y) = x^2+y^2$ pos def ✓

c) $\dot{V}(t,x,y) = (x^2+3y^2-6)\underbrace{(6x^2e^t+12y^2e^t)}_{>0}$ neg def in $\overline{K_\sigma(0,0)}$ bei σ hinr. klein

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} V(x,y) = 0$, glm bzgl $t \in [a,\infty)$ da unabh. von t

$\Rightarrow$ 0-Lösung ist asymptotisch stabil auf $[a,\infty)$ $\forall a \in \mathbb{R}$

S 13.4) $\dot{x} = (-2x-3y)(x^2+y^2-xy+3)$ $\quad V(x,y) = ax^2+by^2$

$\dot{y} = (5x-2y)(x^2+y^2-xy+3)$ $\quad \dot{V}(x,y) = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y}$

$\dot{V}(x,y) = (x^2+y^2-xy+3)(-4ax^2-4by^2+xy(10b-6a))$

$10b = 6a \Leftrightarrow b = \frac{3}{5}a$

$a=1$, $b=\frac{3}{5}$

a) $V(0,0) = 0$ ✓

b) $V(x,y) = x^2+\frac{3}{5}y^2$ pos def auf $\overline{K_\sigma(0,0)}$ ✓

c) $\dot{V}(x,y) = (x^2+y^2-xy+3)\underbrace{(-4x^2-\frac{12}{5}y^2)}_{<0}$ neg def auf $\overline{K_\sigma(0,0)}$ für σ hinr. klein

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} V(x,y) = 0$ glm bzgl t

a.s. St.

S 14.3) später, FS Lösung

S 15.3) $\dot{x} = (2e^t x - y)(x^2 + 2y^2 - 4)$ $\quad V(x,y) = ax^2 + by^2$

$\dot{y} = (2x + 3e^t y)(x^2 + 2y^2 - 4)$ $\quad \dot{V}(x,y) = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} =$

$= 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} = (x^2 + 2y^2 - 4)\left(4ax^2e^t + 6by^2e^t + 2xy(2b - a)\right)$

$2b - a = 0 \Rightarrow a = 2b$

$a = 1, b = \frac{1}{2}$

a) $V(0,0) = 0$ ✓

b) $V(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ pos def auf $\overline{K_\delta(0,0)}$

c) $\dot{V}(x,y) = (x^2 + 2y^2 - 4)(\underbrace{4x^2e^t + 3y^2e^t}_{>0})$ neg def auf $\overline{K_\delta(0,0)}$

für δ hinr. klein

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} V(x,y) = 0$, glm bzgl t.

as. St.

S 22.4) $\dot{x} = (e^{2t} x - y)(x^2 + 2y^2 - 4)$ $\quad V(x,y) = ax^2 + by^2$

$\dot{y} = (2x + 3e^t y)(x^2 + 2y^2 - 4)$ $\quad \dot{V}(x,y) = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}$

$\dot{V}(x,y) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y}$

$\dot{V}(x,y) = (x^2 + 2y^2 - 4)\left(2ax^2e^{2t} + 6by^2e^t + 2xy(2b - a)\right)$ $\quad 2b = a \Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}$

a) $V(0,0) = 0$ ✓

b) $V(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ pos def auf $\overline{K_\delta(0,0)}$

c) $\dot{V}(x,y) = (x^2 + 2y^2 - 4)(\underbrace{2x^2e^{2t} + 3y^2e^t}_{>0})$ neg def auf $\overline{K_\delta(0,0)}$

für δ hinr. klein

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} V(x,y) = 0$ glm bzgl t.

as. St.

S14.3) $x^{(3)} = \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{5}{8}x - \dot{x}\right)\left(1 - t^2\left(\dot{x}^2 - 1\right)\right)$

$y := \dot{x}$
$z := \dot{y}$

$$\dot{z} = \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{5}{8}x - y\right)\left(1 - t^2\left(y^2-1\right)\right) = \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{5}{8}x - y - \frac{5}{8}x t^2(y^2-1) + y t^2(y^2-1)\right)$$
$$= \frac{1}{1+t^2}\left(\left(\frac{5}{8}x - y\right)\left(1 - t^2\left(y^2-1\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{1+t^2}\left(\left(\frac{5}{8}x - y\right)\left(1 - t^2y^2 + t^2\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{1+t^2}\left(\left(\frac{5}{8}x - y\right)\left((1+t^2) - t^2y^2\right)\right) =$$
$$= \frac{5}{8}x - y - \frac{t^2y^2\left(\frac{5}{8}x - y\right)}{1+t^2}$$

Linearisierung um $(0,0)$:

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$s(t,x,y) = f(t,x,y,z) - A\cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{t^2y^2\left(y - \frac{5}{8}x\right)}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Hat Matrix EW mit mind. 1. pos Realteil und $\lim \frac{\| s(t,x,y,z)\|}{\|\vec{x}\|} = 0$ glm bzgl t, so ist die Null-Lösung des Systems $\dot{x} = A\cdot x + s(t,x)$ instabil auf $[0,\infty)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\| s(t,\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|_{max}} \le \lim_{x\to 0} \frac{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot y^2\left|y - \frac{5}{8}x\right|}{|y|} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{t^2}{1+t^2}}_{<1} |y|\cdot\left|y - \frac{5}{8}x\right| \le \lim_{x\to 0} |y|\cdot\left|y - \frac{5}{8}x\right| = 0$$

Betrachte $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{5}{8} - \lambda$

Hurwitz: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ $\quad M_1 = 0$, $M_2 = \frac{5}{8}$, $M_3 = \frac{25}{64}$

Hurwitz mit ε: $\begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{5}{8} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ $\quad M_1^* = \varepsilon$

Folge: $-1, \varepsilon, \frac{5}{8\varepsilon}, \frac{5}{8}$ $\quad$ 1VZW

$\Rightarrow \exists!$ EW mit $Re(\lambda) > 0$

$\Rightarrow$ instabil!

S 18.4) $\dot{x} = (2x+3y)\overbrace{(x^4+y^4+3xy+2)}^{G}$

$\dot{y} = (4x+5y)(x^4+y^4+3xy+2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2G+(2x+3y)(4x^3+3y) & 3G+(2x+3y)(4y^3+3x) \\ 4G+(4x+5y)(4x^3+3y) & 5G+(4x+5y)(4y^3+3x) \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$s(t,x,y) = f(t,x,y) - Ax = \begin{pmatrix} (2x+3y)(x^4+y^4+3xy) \\ (4x+5y)(x^4+y^4+3xy) \end{pmatrix}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\| s(t,x,y)\|}{\|\vec{x}\|} = 0$ ✓ glm bzgl t

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

EW von A: $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 8 & 10-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 14\lambda - 8$

$\lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49+8}$

~~vermutlich Angabefehler ($\dot{y} = -(4x+5y)$ ...)~~

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

Nulllösung des urspr. Systems instabil.

S 5.4) $\dot{x} = (2x+3y)\overbrace{(x^4+y^4+3xy+2)}^{G}$

$\dot{y} = -(4x+5y)(x^4+y^4+3xy+2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2G+(2x+3y)(4x^3+3y) & 3G+(2x+3y)(4y^3+3x) \\ -4G-(4x+5y)(4x^3+3y) & -5G-(4x+5y)(4y^3+3x) \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$s(t,x,y) = f(t,x,y) - Ax = \begin{pmatrix} (2x+3y)(x^4+y^4+3xy) \\ -(4x+5y)(x^4+y^4+3xy) \end{pmatrix}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\| s(t,x,y)\|}{\|\vec{x}\|} = 0$ glm bzgl t ✓

EW von A: $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -8 & -10-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+6\lambda+8 = (\lambda+2)(\lambda+4)$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$

Wenn $Re(\lambda_i) < 0 \Rightarrow$ Null-Lösung des lin. Systems asymptotisch stabil

$\lambda_i < 0 \quad i = 1,2$

Da Null-Lsg des lin Systems glm. asy. stabil und $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|s(t,x,y)\|}{\|\vec{x}\|} = 0$ glm in t

$\Rightarrow$ Nulllsg d. ursprünglichen Systems asymptotisch stabil.

§ 17.3) $\dot{x} = y + \frac{\sin(x^2+y^2)}{t^2}$

$\dot{y} = -5x - 3y + \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{e^t}$

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad s(t,x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(x^2+y^2)}{t^2} \\ \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{e^t} \end{pmatrix}$ geht nicht glm gegen 0

suche $\frac{\|s(t,x,y)\|}{\|\vec{x}\|} \leq \varepsilon(t)$ wobei $\int_a^\infty \varepsilon(t)\,dt$ $\exists$

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \underbrace{O(3)}_{<0} \geq x$

$\cos(x) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \underbrace{O(3)}_{>0} - \cancel{1} \geq -\frac{x^2}{2}$

$\|s(t,x,y)\|_\Sigma = \left|\frac{\sin(x^2+y^2)}{t^2}\right| + \left|\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{e^t}\right| \leq \frac{|x^2+y^2|}{t^2} + \frac{(x^2+y^2)^2}{2e^t} =$

$= \frac{\|(x,y)\|_2^2}{t^2} + \frac{\|(x,y)\|_2^4}{2e^t} \leq \|(x,y)\|_2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2e^t}\right)}_{\varepsilon(t)}$

gilt für (x,y) Nähe $(0,0)$

$\Rightarrow \frac{\|s(t,x,y)\|_\Sigma}{\|\vec{x}\|} \leq \varepsilon(t)$

$\int_a^\infty \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2e^t}\right) dt = \left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{2e^t}\right)\Big|_a^\infty < \infty$ ✓ $\quad \forall a > 0$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 5 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{20}{4}}$

Die Lösungen des Systems $\dot{x} = Ax$ sind genau dann asymptotisch stabil für $t \to \infty$, wenn die EW von A alle negativen Realteil haben

$\Rightarrow$ Die Nulllösung des Systems $\dot{x} = A(t) \cdot x$ ist asymptotisch und glm stabil, da von t unabhängig, daher ist die Null-Lösung von $\dot{x} = A(t) \cdot x + s(t,x)$ asymptotisch stabil auf $[a, \infty)$.

S19.4) $\dot{x} = (-4x+2y)(2x^2 \sin t + y^2 - 1)$

$\dot{y} = (3x - y)(2x^2 - 3y^2 \cos t + 6)$

$$A = \begin{pmatrix} -4(2x^2\sin t + y^2 - 1) + (-4x+2y)(4x\sin t) & 2(2x^2\sin t + y^2 - 1) + (-4x+2y)(2y) \\ 3(2x^2 \overset{-3y^2\cos t + 6}{\cancel{\sin t + y^2 - 1}}) + (3x-y)(4x) & -(2x^2 - 3y^2\cos t + 6) + (3x-y)(-6y\cos t) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} \qquad s(t,x,y) = f(t,x,y) - A \cdot x =$$

$$= \begin{pmatrix} (-4x+2y)(2x^2\sin t + y^2) \\ (3x-y)(2x^2 - 3y^2\cos t) \end{pmatrix}$$

$$\lim \frac{\| s(t,x,y) \|}{\| \vec{x} \|} = 0 \quad \text{glm bzgl } t \quad \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 18 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 12 \quad , \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-11}$$

$Re(\lambda_i)_{i=1,2} < 0 \Rightarrow$ asymptotisch stabil

$\Rightarrow$ Urspr. System ist $\overset{\text{0-Lsg}}{\vee}$ asymptotisch stabil

§ 25.2) $\dot{x} = (3x-4y)(x^2\cos t + 2)$

$\dot{y} = (x+2y)(x^2-2y^2\sin 2t - 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 3(x^2\cos t+2)+(3x-4y)(2x\cos t) & -4(x^2\cos t+2) \\ (x^2-2y^2\sin 2t-1)+(x+2y)\cdot 2x & 2(x^2-2y^2\sin 2t-1)+2(x+2y)(4y\sin 2t) \end{pmatrix}\Big|_{(0,0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad s(t,x,y) = f(t,x,y) - A\cdot x = \begin{pmatrix} (3x-4y)(x^2\cos t) \\ (x+2y)(x^2-2y^2\sin 2t) \end{pmatrix}$$

$$\lim \frac{\|s(t,x,y)\|}{\|\vec{x}\|} = 0 \quad \text{glm bzgl } t$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 20 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{24} = 2 \pm 2\sqrt{6}$$

$\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 < 0$

Nulllösung des urspr. Systems instabil

P 1.4) Klassifikation der stationären Punkte, Phasenportrait

$\dot{x} = (x+4)(y^2 - y - 2) =: p$

$\dot{y} = y(x+1)(e^y - 1) =: q$

$P_1 = (-4, 0)$

$x = -4 \Rightarrow \dot{x} = 0$ $\qquad$ $P_2 = (-1, 2)$

$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ $\qquad$ $P_3 = (-1, -1)$

$\frac{\partial p}{\partial x} = (y^2 - y - 2)$ $\qquad$ $\frac{\partial q}{\partial x} = y(e^y - 1)$

$\frac{\partial p}{\partial y} = (x+4)(2y-1)$ $\qquad$ $\frac{\partial q}{\partial y} = (e^y - 1)(x+1) + ye^y(x+1)$

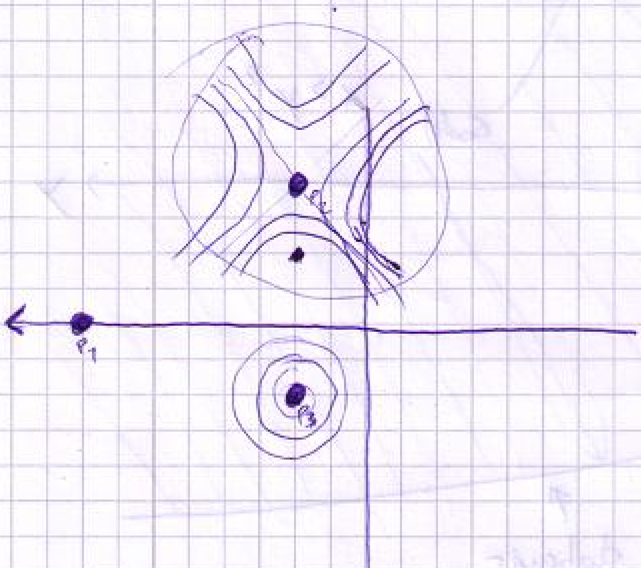
$\frac{d(p,q)}{d(x,y)}(-4,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ singulär $\Rightarrow$ keine Aussage über $(-4,0)$

$\frac{d(p,q)}{d(x,y)}(-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 2(e^2-1) & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} -\lambda & 9 \\ 2(e^2-1) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18(e^2-1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3\sqrt{2(e^2-1)}$

$\Rightarrow (-1,2)$ ist Sattelpunkt, da $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$\frac{d(p,q)}{d(x,y)}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -(e^{-1}-1) & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} -\lambda & -9 \\ -(e^{-1}-1) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9(e^{-1}-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3\underbrace{\sqrt{e^{-1}-1}}_{<0}$

$= \pm 3\sqrt{1 - e^{-1}}\, i \Rightarrow (-1,-1)$ ist Zentrum



P 2.4) Phasenportrait, ω-Grenzmenge

$$\dot{x} = y^3 - xy \qquad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \qquad x = r\cdot\cos\varphi$$
$$\dot{y} = x^2 - xy^2 \qquad r^2\dot{\varphi} = \dot{y}x - y\dot{x} \qquad y = r\cdot\sin\varphi$$

$$r\dot{r} = \cancel{xy^3} - \cancel{x^2y} + \cancel{yx^2} - \cancel{xy^3} = 0 \quad \Rightarrow r \text{ konstant}$$

$\dot{r} = 0$, da $r > 0$

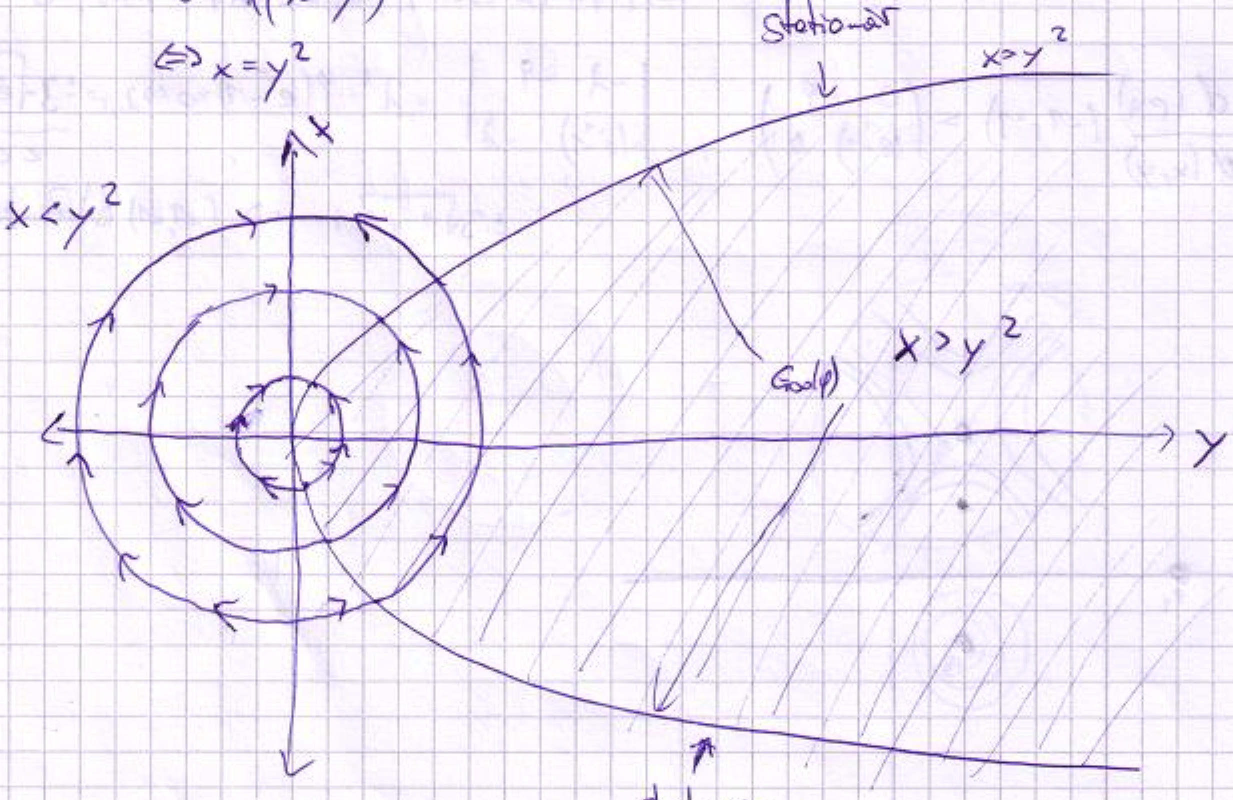
$$r^2\dot{\varphi} = x^3 - x^2y^2 - y^4 + xy^2 = r^3\cos^3\varphi - r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - r^4\sin^4\varphi + r^3\cos\varphi\sin^2\varphi$$
$$\dot{\varphi} = r\cos^3\varphi \underbrace{- r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi - r^2\sin^4\varphi}_{<0} + r\cos\varphi\sin^2\varphi$$
$$\dot{\varphi} = r\cos - r^2\sin^2 = r(\cos\varphi - r\sin^2\varphi) = \cancel{r}\left(\frac{x}{\cancel{r}} - \cancel{r}\frac{y}{\cancel{r}}\cdot\frac{y}{\cancel{r}}\right) = x - y^2$$

$$\dot{\varphi} > 0 \Leftrightarrow x > y^2$$

stat. Punkte: $0 = y(y^2 - x)$

$0 = x(x - y^2)$

$\Leftrightarrow x = y^2$



Parabel $x = y^2$ ist ω-Grenzmenge

P 3.3) Klassifikation stat. Pkte.

$\dot{x} = (x-y)(y^2-2y) =: p$

$\dot{y} = (x+3)(y^3+1) =: q$

$x=-3 \Rightarrow y=-3 \lor y=0 \lor y=2$

$y=-1 \Rightarrow x=-1$

$P_1 = (-1/-1)$

$P_2 = (-3/-3)$

$P_3 = (-3/0)$

$P_4 = (-3/2)$

$\frac{\partial p}{\partial x} = y^2-2y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = y^3+1$

$\frac{\partial p}{\partial y} = 2y-y^2+(x-y)(2y-2) \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = 3y^2(x+3)$

$M(P_1) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 18-9\lambda+\lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}-\frac{72}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$

($\Rightarrow$ pos. def.) $\Rightarrow$ Pkt abstoßender Knoten, da beide EW >0

$M(P_2) = \begin{pmatrix} 15 & -15 \\ -26 & 0 \end{pmatrix} \qquad -15\lambda+\lambda^2-390 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}+\frac{1560}{4}}$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt, da ein EW größer 0 $\lambda_1 > 0$, und einer kleiner 0 $\lambda_2 < 0$

$M(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 = 6 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{6} = \pm\sqrt{2}\cdot 2$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$M(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 = -90 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{90} = \pm 3i\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ Zentrum ~~, da komplexe EW~~ ~~, abstoßender od. anziehender Knoten~~

P 5.3) $\dot{x} = (x-4)(y^2-y-2) =: p$

$\dot{y} = (x-1)(e^y-1)y =: q$

$x=4 \Rightarrow y=0$ $\qquad P_1 = (4/0)$

$y^2-y-2=0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$ $\qquad P_2 = (1/2)$

$y_1 = 2 \Rightarrow x=1$ $\qquad P_3 = (1/-1)$

$y_2 = -1 \Rightarrow x=1$

$\frac{\partial p}{\partial x} = y^2-y-2$ $\qquad \frac{\partial p}{\partial y} = (x-4)(2y-1)$

$\frac{\partial q}{\partial x} = (e^y-1)y$ $\qquad \frac{\partial q}{\partial y} = (x-1)(e^y-1) + (x-1)(e^y)y$

$M(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ keine Aussage da singulär

$M(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ (e^2-1)\cdot 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda^2 + 18(e^2-1) = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{-18(e^2-1)} = \pm 3i\sqrt{2(e^2-1)}$

Zentrum (abstoßender, od anziehender Knoten ?)

$M(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1-e^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \cancel{\lambda^2}\ \cancel{\lambda} + \lambda^2 - 9 + 9e^{-1}$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{9 - 9e^{-1}} = \pm 3\sqrt{1-e^{-1}}$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

P 63) $\dot{x} = (x+y)(x^2y-4) =: p$ $\qquad P_1 = (-4/4)$

$\dot{y} = (y-4)(x^3-1) =: q$ $\qquad P_2 = (-1/4)$

$\cancel{y} = 4 \Rightarrow x = -4 \vee x = -1 \vee x = 1$ $\qquad P_3 = (1/4)$

$x = 1 \Rightarrow y = -1$ $\qquad P_4 = (1/-1)$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = x^2y - 4 + (x+y)(2xy) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = x^2y - 4 + (x+y)x^2$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = (y-4)\,3x^2 \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = x^3 - 1$$

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 60 & 60 \\ 0 & -65 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 65 \cdot 60 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{15600}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{125}{2}$$

besser: Jordan

$$\lambda_1 = 60$$
$$\lambda_2 = -65$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -24 \;, \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{anziehender Knoten}$$

$$M(P_3) = \begin{pmatrix} 40 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{keine Aussage möglich, da singulär}$$

$$M(P_4) = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 5\lambda + \lambda^2 - 75 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{300}{4}}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm 5\sqrt{13}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

P 7.4) $\dot{x} = y + x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2)$ $\quad x = r\cdot\cos\varphi$

$\dot{y} = -x + y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2)$ $\quad y = r\cdot\sin\varphi$

$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$

$r^2\dot{\varphi} = \dot{y}x - y\dot{x}$

$r\dot{r} = \cancel{xy} + x^2(r^2-1)(r^2-2) \cancel{-yx} + y^2(r^2-1)(r^2-2) =$

$\cancel{r}\dot{r} = r^{\cancel{2}}\cos^2\varphi(r^2-1)(r^2-2) + r^{\cancel{2}}\sin^2\varphi(r^2-1)(r^2-2)$

$\dot{r} = (r^2-1)(r^2-2)\cdot r$

$\cancel{r \in (-\infty, 0)}$

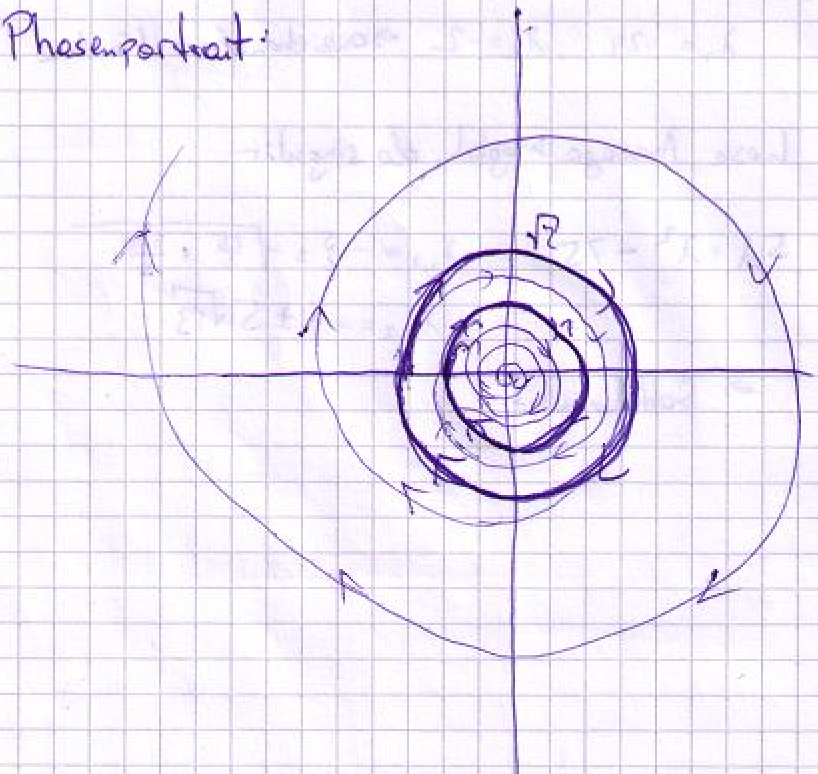
$r \in (0,1)$	>0
$r \in (1,\sqrt{2})$	<0
$r \in (\sqrt{2},\infty)$	>0

r konstant bei $\{0, 1, \sqrt{2}\}$

$r^2\dot{\varphi} = -x^2 + \cancel{xy(r^2-1)(r^2-2)} - y^2 \cancel{-yx(r^2-1)(r^2-2)}$

$\dot{\varphi} = -1$

Phasenportrait:



Lösung φ derart, dass

$r > \sqrt{2}$, $G_\infty(\varphi)$ unbeschränkt

$1 < r \le \sqrt{2}$, $Rd(\overline{K_{\sqrt{2}}(0,0)})$

$0 < r \le 1$, $Rd(\overline{K_1(0,0)})$

$r = 0$, $(0,0)$

P 8.4) $\dot{x} = x(x^2+y^2-9) - y(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2-4)$

$\dot{y} = y(x^2+y^2-9) + x(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2-4)$

$x = r\cdot\cos\varphi \qquad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$

$y = r\cdot\sin\varphi \qquad r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - \dot{x}y$

$$r\dot{r} = x^2(x^2+y^2-9) \cancel{-xy(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2-4)}$$
$$+ y^2(x^2+y^2-9) \cancel{+xy(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2-4)} =$$
$$= \cos^2\varphi\, r^2(r^2-9) - r^2\sin^2\varphi\,(r^2-9)$$
$$\dot{r} = r\cos^2\varphi(r^2-9) - r\sin^2\varphi(r^2-9)$$
$$\boxed{\dot{r} = r(r^2-9)}$$

$$r^2\dot{\varphi} = xy(r^2-9) + x^2(r^2-1)^2(r^2-4) - xy(r^2-9) + y^2(r^2-1)^2(r^2-4)$$
$$\dot{\varphi} = \cancel{\sin\varphi\cos\varphi(r^2-9)} + \cos^2\varphi(r^2-1)^2(r^2-4) \cancel{-\sin\varphi\cos\varphi(r^2-9)} + \sin^2\varphi(r^2-1)^2(r^2-4)$$
$$\boxed{\dot{\varphi} = (r^2-1)^2(r^2-4)}$$

$r \in (0,2)\setminus\{1\} \Rightarrow \dot{\varphi} < 0$

$r \in (2,\infty) \Rightarrow \dot{\varphi} > 0$

$r = \{2,1\} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$

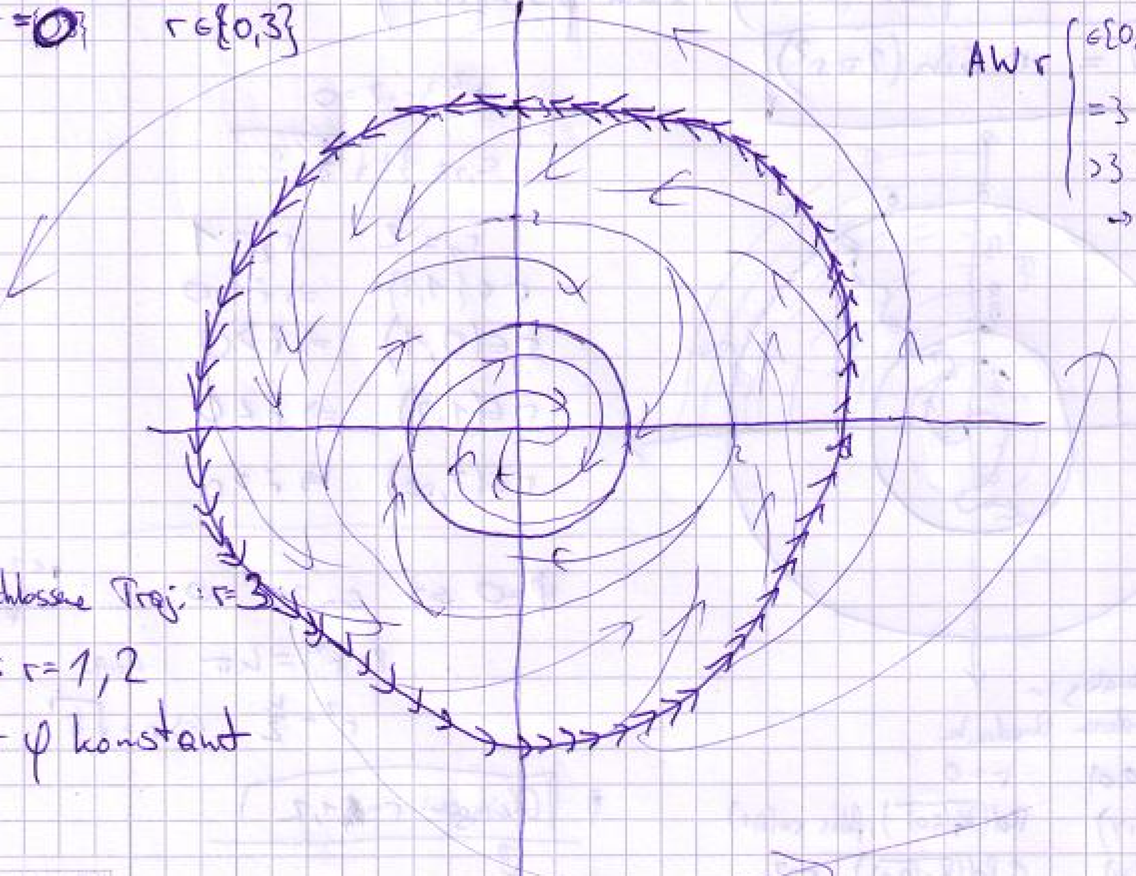
$\Rightarrow \varphi$ konstant

$\dot{r} < 0 \quad r \in (0,3)$

$\dot{r} > 0 \quad r \in (3,\infty)$

$\dot{r} = 0 \quad r \in \{0,3\}$

AW r
- $\in [0,3) \to G_\infty(\varphi) = \{(0,0)\}$
- $= 3 \to G_\infty(\varphi) = \{(x,y) : x^2+y^2 = 9\}$
- $> 3 \to \varphi(t)$ wird unbeschränkt $\to G_\infty(\varphi) = \emptyset$



geschlossene Traj: r=3

bei r=1,2

ist φ konstant

P 9.4) $\dot{x} = \sqrt{x^2+y^2}\left(x - y\sin 2\pi(x^2+y^2) - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2x}{x^2+y^2}\right)$

$\dot{y} = \sqrt{x^2+y^2}\left(y + x\sin 2\pi(x^2+y^2) - \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$
$r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - y\dot{x}$

$\cancel{r}\dot{r} = x\cancel{r}\left(x - y\sin 2\pi r^2 - \frac{3x}{r} + \frac{2x}{r^2}\right) + y\cancel{r}\left(y + x\sin 2\pi r^2 - \frac{3y}{r} + \frac{2y}{r^2}\right) =$

$= r^2\cos^2\varphi - \cancel{r^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\sin(2\pi r^2)} - 3r\cos^2\varphi + 2\cos^2\varphi +$
$+ r^2\sin^2\varphi + \cancel{r^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\sin(2\pi r^2)} - 3r\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi$

$\boxed{\dot{r} = r^2 - 3r + 2}$

$\cancel{r^2}\dot{\varphi} = \cancel{r}\cos\varphi\left(r\sin\varphi + r\cos\varphi\sin(2\pi r^2) - \frac{3\sin\varphi r}{r} + \frac{2\sin\varphi r}{r^2}\right) -$
$- \cancel{r}\sin\varphi\left(r\cos\varphi - r\sin\varphi\sin(2\pi r^2) - \frac{3\cos\varphi r}{r} + \frac{2\cos\varphi r}{r^2}\right)$

$\dot{\varphi} = r\cos^2\varphi\sin(2\pi r^2) + r\sin^2\varphi\sin(2\pi r^2) =$
$\boxed{\dot{\varphi} = r\sin(2\pi r^2)}$

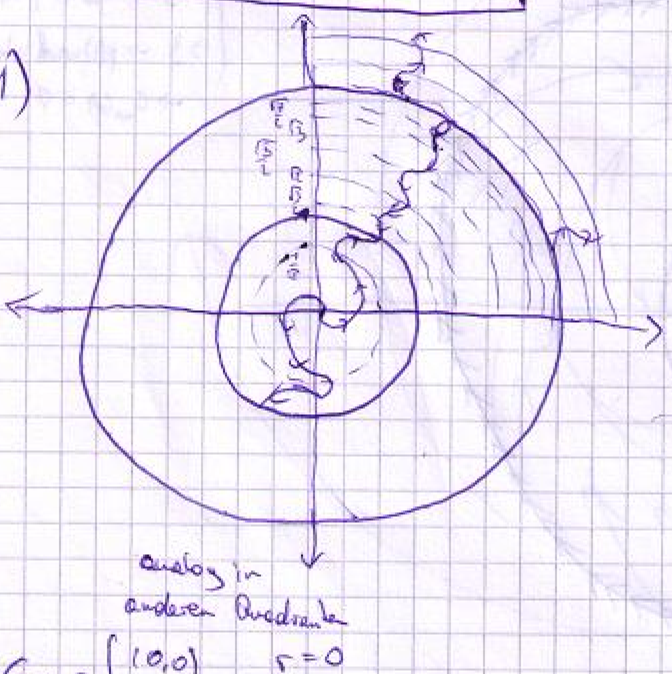
$r^2 - 3r + 2 = 0$

$r_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$

$r_1 = 2$, $r_2 = 1$

$r \in \{1,2\} \Rightarrow \dot{r} = 0$
$r \in (0,1) \Rightarrow \dot{r} > 0$
$r \in (1,2) \Rightarrow \dot{r} < 0$
$r \in (2,\infty) \Rightarrow \dot{r} > 0$

1)



analog in anderen Quadranten

$\dot{\varphi} = 0 \iff \sin 2\pi r^2 = 0$

$r<1 \Rightarrow \dot{\varphi} \begin{cases} >0, & \varphi \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ <0, & \varphi \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) \end{cases}$

$2\pi r^2 = k\pi \quad k\in\mathbb{N}$

$r^2 = \frac{k}{2} \iff r = \sqrt{\frac{k}{2}}$

2) $\boxed{\text{Gleichgew. } r = 1,2}$
$\Updownarrow$
$\dot{r} = 0, \dot{\varphi} = 0$

4) $G_\infty = \begin{cases} (0,0) & r = 0 \\ (x,y) & Rd(\overline{K_1(0,0)}), \text{ falls } r\in(0,2) \\ (x,y) & \in Rd(\overline{K_2(0,0)}), \ r = 2 \\ \emptyset & , \ r > 2 \end{cases}$

3) die einzigen per. Lösungen sind die Gleichgewichtslagen, d.h. ihre Trajektorien sind die stationären Punkte.

P11.4) $\dot{x} = (x^2+y^2-4)\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y(x^2+y^2)\right)$ $\quad x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\dot{y} = (x^2+y^2-4)\left(x(x^2+y^2) + y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ $\quad r\dot{r} = x\dot{x}+y\dot{y}$, $r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - y\dot{x}$

$$\cancel{r}\dot{r} = \cancel{r}\cos\varphi(r^2-4)\left(r\cos\varphi\sin\frac{1}{r} - r^3\sin\varphi\right) + \cancel{r}\sin\varphi(r^2-4)\left(r^3\cos\varphi + r\sin\varphi\sin\frac{1}{r}\right) =$$

$$\boxed{\dot{r} = r\sin\frac{1}{r}(r^2-4)}$$

$$r^2\dot{\varphi} = x(r^2-4)\left(r^3\cos\varphi + r\sin\varphi\sin\frac{1}{r}\right) - y(r^2-4)\left(r\cos\varphi\sin\frac{1}{r} - r^3\sin\varphi\right)$$

$$\dot{\varphi} = \cos\varphi(r^2-4)\left(r^2\cos\varphi + \cancel{\sin\varphi\sin\frac{1}{r}}\right) - \sin\varphi(r^2-4)\left(-r^2\sin\varphi + \cancel{\cos\varphi\sin\frac{1}{r}}\right)$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = r^2(r^2-4)}$$

$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0$
$r = 2$
$r = \frac{1}{k\pi}$

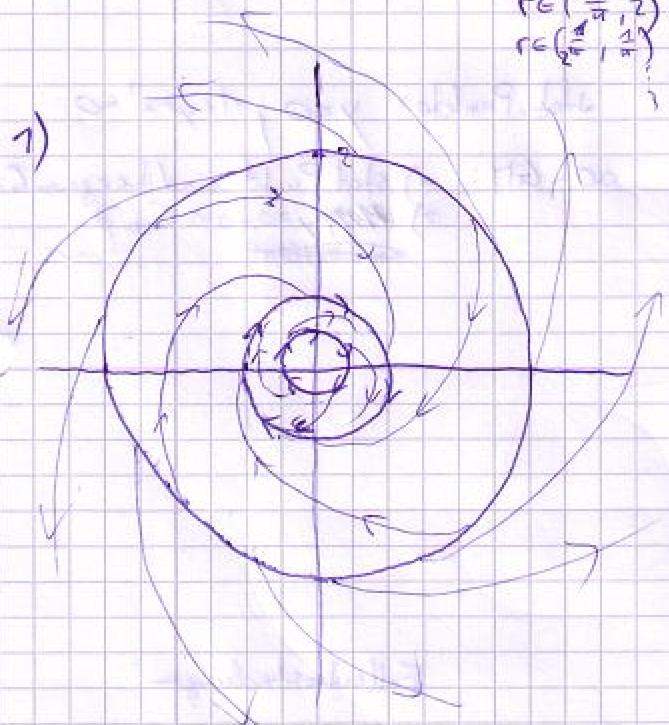
$\sin\frac{1}{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} = k\pi$
$r = \frac{1}{k\pi}$

$\dot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow r = 0$
$r = 2$

$\varphi \in (0,2) \Rightarrow \dot{\varphi} < 0$
$\varphi \in (2,\infty) \Rightarrow \dot{\varphi} > 0$

$r \in (2,\infty) \Rightarrow \dot{r} > 0$
$r \in (\frac{1}{\pi}, 2) \Rightarrow \dot{r} < 0$
$r \in (\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}) \Rightarrow \dot{r} > 0$
⋮

1)



Gleichgewichtslage: $r=0, r=2$

Trajektorie mit per. Lsgen: $r = 0, 2, \frac{1}{k\pi}$

Stabilitätsverhalten:

1) alle Lösungen mit $r \geq 2$ oder $r = \frac{1}{k\pi}$ (k gerade) sind instabil.

2) alle anderen Lösungen sind stabil.

P 12.3)

$$\dot{x} = x^3 y + xy^2 + xy$$
$$\dot{y} = x^2 y^2 + y^3 + y^2$$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$$
$$r^2 \dot{\varphi} = x\dot{y} - \dot{x}y$$

$$r\dot{r} = x^4 y + x^2 y^2 + x^2 y + x^2 y^3 + y^4 + y^3$$

$$\dot{r} = r^4 \cos\varphi \sin + r^3 \cos^2 \sin^2 + r^2 \cos^2 \sin + r^4 \cos^2 \sin^3 + r^3 \sin^4 + r^2 \sin^3 \varphi$$

$$\dot{r} = r^4 \cos^2 \sin + r^3 \sin^2 + r^2 \sin$$
$$= r (y + y^2 + yx^2)$$

$$r^2\dot{\varphi} = x^3 y^2 + \cancel{xy^3} + xy^2 - x^3 y^2 - \cancel{xy^3} - xy^2 = \cancel{r^5 \cos^5\varphi \sin^2\varphi - r^5 \cos^5\varphi \sin^2\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = 0 \qquad \forall r$$

$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0, y = 0$

$y + y^2 + yx^2 = 0 \quad | : y \neq 0$

$1 + y + x^2 = 0$

$y = -x^2 - 1$

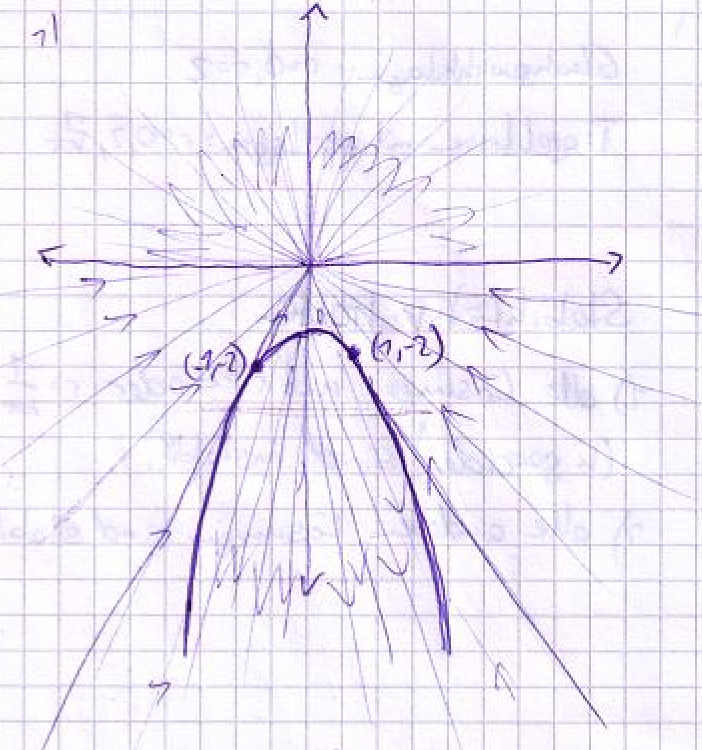
1. Fall: $y > 0 \wedge 1 + y + x^2 > 0$
2. Fall: $y > 0 \wedge 1 + y + x^2 < 0$ ↯

$\Big\}\ \dot{r} > 0$

3. Fall: $y < 0 \wedge 1 + y + x^2 > 0 \quad \dot{r} < 0$
4. Fall: $y < 0 \wedge 1 + y + x^2 < 0 \quad \dot{r} > 0$

stat. Punkte: $y = 0,\ 1 + y + x^2 = 0$

∞-GM: 1) stat. Punkt sind ihre eigenen G_∞
2) $y > 0, x = 0 \Rightarrow G_\infty$ ↯



$y = -x^2 - 1$
$y = kx$

$kx = -x^2 - 1$
$x^2 + kx + 1 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}$

Fallunterscheidungen

$\Downarrow$

$y = 2x \Rightarrow 2x + x^2 + 1 = 0$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{0}$

$\Uparrow$

$\frac{k^2}{4} - 1 = 0$
$\Rightarrow k = \pm 2$

P 12.4) $\dot{x} = (y^2 - x)(y^2 + 2y - 3) =: p$ stat. Pkte?

$\dot{y} = (x + y + 1)(xy - 8) =: q$

i) $y = -x - 1 \Rightarrow \cancel{y^2 + y + 1 = 0}$ $\cancel{y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}}$

$(x^2 + 2x + 1 - x) \cdot (x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 - 3) = 0$

$(x^2 + x + 1)(x^2 - 4) = 0$

$\boxed{x_{1,2} = \pm 2}$

$x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ii) $y = \frac{8}{x} \Rightarrow \left(\frac{64}{x^2} - x\right)\left(\frac{64}{x^2} + \frac{16}{x} - 3\right) = 0$

$64 = x^3$

$\boxed{x = 4}$

$3x^2 - 16x - 64$

$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 768 = 1024}}{6}$

$x_{1,2} = \frac{16 \pm 32}{6}$ $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{8}{3}$

$P_1 = (4|2)$ $P_4 = (2|-3)$

$P_2 = (8|1)$ $P_5 = (-2|1)$

$P_3 = (-\frac{8}{3}|-3)$

$$\frac{d(p,q)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y^2 + 2y - 3) & 2y(y^2 + 2y - 3) + (y^2 - x)(2y + 2) \\ (xy - 8) + (x + y + 1)y & (xy - 8) + (x + y + 1)x \end{pmatrix} =: A(x,y)$$

$$A(4|2) = \begin{pmatrix} -5 & 20 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -5-\lambda & 20 \\ 14 & 28-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 23\lambda - 420 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \frac{23}{2} \pm \sqrt{\frac{23^2}{4} + 420}$

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$$A(8|1) = \begin{pmatrix} 0 & -28 \\ 10 & 80 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & -28 \\ 10 & 80-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 80\lambda + 280$$

$\Rightarrow \lambda = 40 \pm \sqrt{1600 - 280}$ > 0

$$A(-2|1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & 12 \\ -10 & -10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 120 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -5 \pm \sqrt{25 - 120} = -5 \pm \sqrt{95}\, i \in \mathbb{C}$$

$$A(2|-3) = \begin{pmatrix} 0 & -28 \\ -14 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & -28 \\ -14 & -14-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 14\lambda - 2 \cdot 14^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -7 \pm \sqrt{49 + 2 \cdot 14^2}$$

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$$A(-\tfrac{8}{3}|-3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 + (9 + \frac{8}{3})(-4) \\ (-\frac{8}{3} - 3 + 1)(-3) & (-\frac{8}{3} - 3 + 1)(-\frac{8}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{140}{3} \\ 14 & \frac{112}{9} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{140}{3} \\ 14 & \frac{112}{9} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{112}{9}\lambda + \frac{14 \cdot 140}{3} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{56}{9} \pm \sqrt{\frac{112}{81} - \frac{14 \cdot 140}{3}} \in \mathbb{C}$

- $P_2(8|1)$ ist abstoßender Knoten
- $P_4(2|-3) \wedge P_1(4|2)$ Sattelpunkt
- $P_5(-2|1) \to Re(\lambda) < 0 \Rightarrow$ abstoßender Strudelpunkt
- $P_3(-\frac{8}{3}, -3) \to Re(\lambda) > 0 \to$ anziehender Strudelpunkt

ρ 14.4) $\dot{x} = -y(y^2-x^2)$ Phasenportrait, ∞-GM ?

$\dot{y} = x(y^2-x^2)$

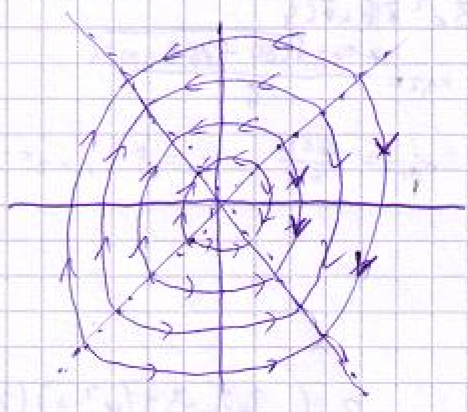
$x = r\cos\varphi \qquad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$

$y = r\sin\varphi \qquad r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - \dot{x}y$

$\dot{r} = 0 \quad \forall r$

$r^2\dot{\varphi} = x^2(y^2-x^2) + y^2(y^2-x^2)$

$\dot{\varphi} = y^2 - x^2 \qquad \dot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm x$



$|y| > |x| \Rightarrow \dot{\varphi} > 0$

$|y| < |x| \Rightarrow \dot{\varphi} < 0$

$(r/-r)$ oder $(-r/r)$

$r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow G_\infty(\varphi) = \{ \cancel{\ldots} \}$

für $\varphi \neq \frac{\pi}{4}$, $\varphi \neq \frac{5\pi}{4}$

$\Downarrow$

sind selbst ihre GM.

15.4.) = 24

17.4) $\dot{x} = (x+y)(x^2y-4) =: p$

$\dot{y} = (y-4)(x^3-1) =: q \qquad y = 4 \Rightarrow x = -4 \vee x = \pm 1$

$x = \pm 1 \Rightarrow y = -1 \vee y = 4$

$P_1 = (-4/4) \quad P_3 = (-1/4)$

$P_2 = (1/4) \quad P_4 (1/-1)$

$\frac{d(p,q)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2y-4) + (x+y)(2xy) & (x^2y-4) + (x+y)x^2 \\ 3x^2(y-4) & (x^3-1) \end{pmatrix} =: A$

$A(-4/4) = \begin{pmatrix} 60 & 60 \\ 0 & -65 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 60-\lambda & 60 \\ 0 & -65-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 65\cdot 60 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{60\cdot 65\cdot 4}{4}}$

Sattelpunkt

$A(1/4) = \begin{pmatrix} 40 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ singulär → keine Aussage möglich

$A(-1/4) = \begin{pmatrix} -24 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -24-\lambda & 3 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 26\lambda + 48 \rightarrow \lambda_{1,2} = -13 \pm \sqrt{169 - 48}$

-13 ± 11

$\lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$ anziehender ~~[illegible]~~ Knoten

$A(1/-1) = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & -5 \\ -15 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 75 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{300}{4}}$

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

P 20.4) $\dot{x} = x(x^2+y^2-5)\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right) - y(x^2+y^2)\left(2-(x^2+y^2)^2\right)$

$\dot{y} = x(x^2+y^2)\left(2-(x^2+y^2)^2\right) + y(x^2+y^2-1)\left(1-\frac{5}{x^2+y^2}\right)$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$

$r^2\dot{\varphi} = \dot{y}x - \dot{x}y$

$r\dot{r} = r^2\cos^2\varphi(r^2-5)\left(1-\frac{1}{r^2}\right) - \cancel{r^2\sin\varphi\cos\varphi(r^2)(2-r^4)} + \cancel{r^2\cos\varphi\sin\varphi(r^2)(2-r^4)} + r^2\sin^2\varphi(r^2-1)\left(1-\frac{5}{r^2}\right) =$

$= r^2\cos^2\varphi\left(r^2-1-5+\frac{5}{r^2}\right) + r^2\sin^2\varphi\left(r^2-1-5+\frac{5}{r^2}\right)$

$\dot{r} = r^3 + r\cos^2\varphi\left(-6+\frac{5}{r^2}\right) + r\sin^2\varphi\left(-6+\frac{5}{r^2}\right)$

$\boxed{\dot{r} = r^3 - 6r + \frac{5}{r}}$

$r^2\dot{\varphi} = r^2\cos^2\varphi(r^2)(2-r^4) + \cancel{r^2\cos\varphi\sin\varphi(r^2-1)\left(1-\frac{5}{r^2}\right)} - \cancel{r^2\cos\varphi\sin\varphi(r^2-5)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)} + r^2\sin^2\varphi(r^2)(2-r^4)$

$\boxed{\dot{\varphi} = r^2(2-r^4)}$ $\quad r \neq 0$

$\dot{r} = 0$: $r = 1$, $(r=-1)$, $r = \sqrt{5}$, $(r = -\sqrt{5})$

$(r^4 - 6r^2 + 5) : (r-1) = r^3 + r^2 - 5r - 5$

$r^4 - r^3$

$r^3 - 6r^2$

$r^3 - r^2$

$-5r^2 + 5$

$-5r^2 + 5r$

$-5r + 5$

$(r^3 + r^2 - 5r - 5) : (r+1) = r^2 - 5$

$r^3 + r^2$

$-5r - 5$

$\dot{\varphi} = 0$: $\quad r = \sqrt[4]{2}$

$r \in (0, \sqrt[4]{2}) \Rightarrow \dot{\varphi} > 0$

$r \in (\sqrt[4]{2}, \infty) \Rightarrow \dot{\varphi} < 0$

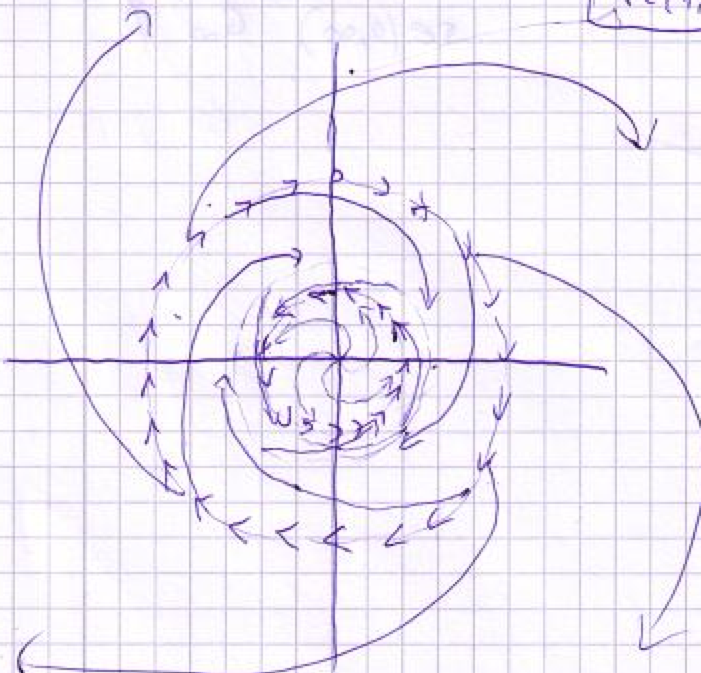
$r \in \{\sqrt[4]{2}\} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$

$r \in (0,1) \Rightarrow \dot{r} > 0$

$r \in (1, \sqrt{5}) \Rightarrow \dot{r} < 0$

$r \in (\sqrt{5}, \infty) \Rightarrow \dot{r} > 0$

$r \in \{1, \sqrt{5}\} \Rightarrow \dot{r} = 0$



Trajektorien bei $r = 1, \sqrt{5}$

P 21.2) $\dot x = (x^2+y^2-4)\,(2x(x^2+y^2+1)-y)$

$\dot y = (x^2+y^2-4)\,(x+2y(x^2+y^2+1))$

$x = r\cos\varphi \quad r\dot r = x\dot x + y\dot y$

$y = r\sin\varphi \quad r^2\dot\varphi = x\dot y - y\dot x$

$r\dot r = (r^2-4)\,(2r\cos\varphi(r^2+1) - r\sin\varphi)\,r\cos\varphi + r\sin\varphi\,(r^2-4)\,(r\cos\varphi + 2r\sin\varphi(r^2+1))$

$\dot r = (r^2-4)\,(2r(r^2+1)) \qquad r \neq 0$

$r^2\dot\varphi = r\cos\varphi\,(r^2-4)(r\cos\varphi + 2r\sin\varphi(r^2+1)) - r\sin\varphi\,(r^2-4)(2r\cos\varphi(r^2+1) - r\sin\varphi)$

$r\dot\varphi = r(r^2-4) \qquad r\neq 0$

$\boxed{\dot\varphi = r^2-4}$

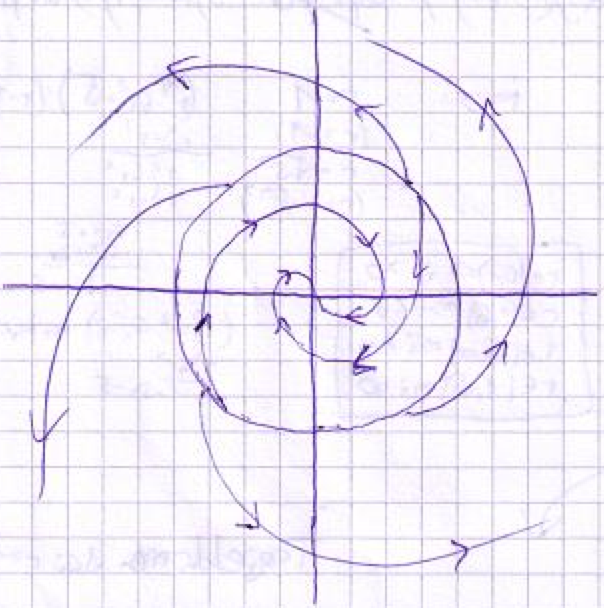
$\dot\varphi = 0: \quad r = \pm 2$

$\dot r = 0: \quad r = \pm 2$

$(r = \pm i)$

$r\in(0,2) \Rightarrow \dot r < 0,\ \dot\varphi < 0$

$r\in(2,\infty) \Rightarrow \dot r > 0,\ \dot\varphi > 0$



stabile Punkte: $x^2+y^2=4$

$r\in(0,2) \Rightarrow G_\infty = (0,0)$

$r = 2 \Rightarrow$ Punkte selbst GM

$r\in(2,\infty)\quad G_\infty\ \emptyset$

P 21.4) $\dot{x} = 4y(x^2 - y + 3) =: p$ $\quad$ ~~$x = r\cos\varphi$ $\quad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$~~

$\dot{y} = (2x - xy + 2)(x^2 + y - 9) =: q$ $\quad$ ~~$y = r\sin\varphi$~~ $\quad r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - \dot{x}y$

~~$r\dot{r} = \dots$~~

$y = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = \pm 3$

$y = x^2 + 3 \Rightarrow x = 1,\ x = \pm\sqrt{3}$

$\quad y = 4 \qquad y = 6$

$2x - x^3 - 3x + 2 = 0$

$x^3 + x - 2 = 0 \qquad x = 1$

$(x^3 + x - 2) : (x - 1) = x^2 + x + 2$

$\underline{x^3 - x^2}$

$x^2 + x$

$\underline{x^2 - x}$

$2x - 2$

$x^2 + x + 2$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$

$x^2 + x^2 - 6 = 0$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

$P_1 = (1/4)$

$P_2 = (\sqrt{3}/6)$

$P_3 = (-\sqrt{3}/6)$

$P_4 = (-1/0)$

$P_5 = (3/0)$

$P_6 = (-3/0)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8xy & 4(x^2 - y + 3) - 4y \\ (2 - y)(x^2 + y - 9) + (2x - xy + 2)2x & (-x)(x^2 + y - 9) + (2x - xy + 2) \end{pmatrix}$$

$$A(1/4) = \begin{pmatrix} 32 & -16 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 32 - \lambda & -16 \\ 8 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 36\lambda + 128 + 128 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 18 \pm \sqrt{18^2 - 256}$$

$\lambda_{1,2} = 18 \pm \sqrt{68} > 0$

$\to$ abstoßender ~~Strudelpunkt~~ Knoten

$$A(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 48 \\ 48 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & 48 \\ 48 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 48^2 = 0 \to \lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 + 48^2} \gtrless 0$$

$\to$ Sattelpunkt

$$A(-3/0) = \begin{pmatrix} 0 & 48 \\ 48 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & 48 \\ 48 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 48^2 = 0 \to \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 48^2} \gtrless 0$$

$\to$ Sattelpunkt

$$A(-1/0) = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ -16 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & 16 \\ -16 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 256 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 256}$$

anziehender Strudelpunkt

$$A(\sqrt{3},6) = \begin{pmatrix} 48\sqrt{3} & -24 \\ -24 + 4\sqrt{3} & -4\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 48\sqrt{3} - \lambda & -24 \\ -24 + 4\sqrt{3} & -4\sqrt{3} + 2 - \lambda \end{vmatrix} \to \lambda^2 + 4\sqrt{3}\lambda - 2\lambda - 48\sqrt{3}\lambda - 12 \cdot 48 + 96\sqrt{3} - 24^2 + 96\sqrt{3} = 0$$

$\lambda^2 + \lambda(-2 - 44\sqrt{3}) + 2(96\sqrt{3} - 24^2)$

$\lambda_{1,2} = 1 + 22\sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 44\sqrt{3} + 3 \cdot 22^2 - 2(96\sqrt{3} - 24^2)}$

$= 1 + 22\sqrt{3} \pm \sqrt{2029 - 148\sqrt{3}}$

$= 1 + 22\sqrt{3} \pm 42{,}1029\ldots \gtrless 0$

$\to$ Sattelpunkt

$$A(-\sqrt{3},6) = \begin{pmatrix} -48\sqrt{3} & -24 \\ -24 - 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -48 - \lambda & -24 \\ -24 - 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} + 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$\to \lambda^2 + 48\lambda - 4\sqrt{3}\lambda - 2\lambda - 96 - 192\sqrt{3} - 24^2 - 96\sqrt{3} =$

$= \lambda^2 + \lambda(46 - 4\sqrt{3}) - 672 - 288\sqrt{3} = 0$

$\lambda_{1,2} = -23 - 2\sqrt{3} \pm \sqrt{529 + 92\sqrt{3} + 12 + 672 + 288\sqrt{3}}$

$= -23 - 2\sqrt{3} \pm \sqrt{1276 + 384\sqrt{3}}$

$-23 - 2\sqrt{3} \pm 44{,}05\ldots \gtrless 0 \to$ Sattelpunkt

P 23.4) $\dot{x} = 6x + 3y + x(x^2+y^2) - (5x+y)\sqrt{x^2+y^2}$

$\dot{y} = -3x + 6y + y(x^2+y^2) + (x-5y)\sqrt{x^2+y^2}$

$x = r\cos\varphi \quad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$

$y = r\sin\varphi \quad r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - y\dot{x}$

$r\dot{r} = 6r^2\cos^2\varphi + \cancel{3r^2\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\cos^2\varphi\, r^2 - r^2\cos\varphi(5r\cos\varphi + r\sin\varphi) \cancel{-3r^2\cos\sin} + 6r^2\sin^2 + r^2\sin^2 r^2 + r\sin(r\cos - 5r\sin)$

$\dot{r} = 6r + r^3 - 5r^2 = r(r^2 - 5r + 6)$

$r_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$

$\dot{r} = 0 \qquad r = 3$

$\qquad\qquad r = 2$

$r^2\dot{\varphi} = -3x^2 + \cancel{6xy} + \cancel{xy r^2} + r^2\cos\varphi(r\cos\varphi - 5r\sin\varphi) \cancel{-6xy} - 3y^2 + \cancel{-r^2xy} + r^2\sin\varphi(5r\cos\varphi + r\sin\varphi)$

$r^2\dot{\varphi} = -3r^2 + r^3$

$\dot{\varphi} = r - 3 \qquad \dot{\varphi} = 0 \text{ wenn } r = 3$

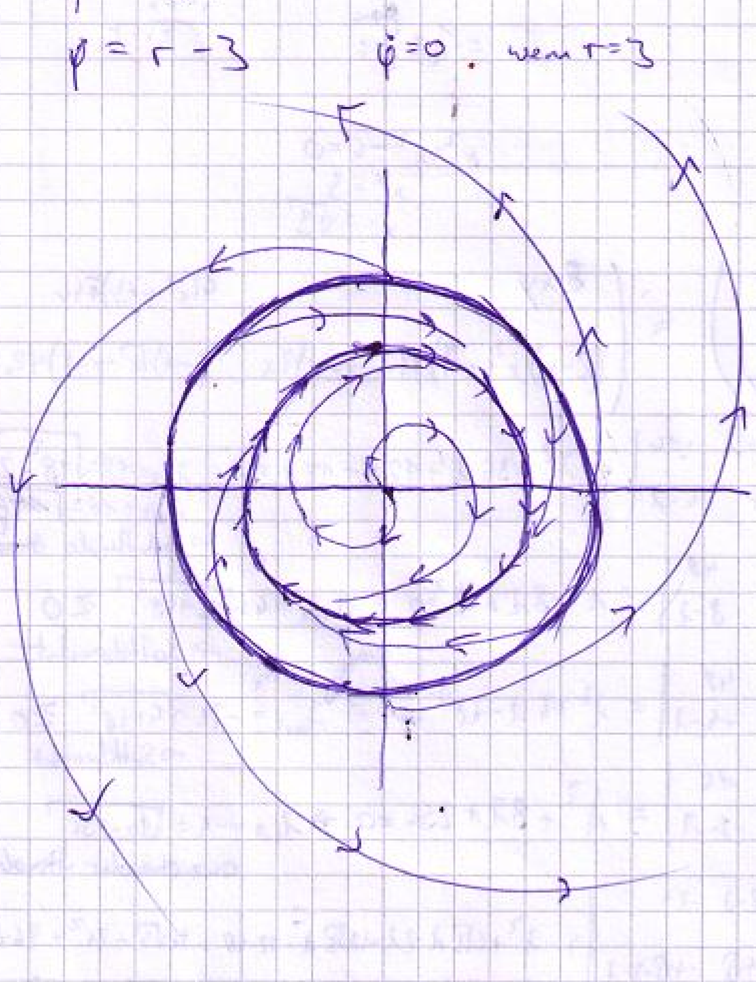
$r \in \{0, 2, 3\} \Rightarrow \dot{r} = 0$

$r \in (0,2) \Rightarrow \dot{r} > 0 \quad \dot{\varphi} < 0$

$r \in (2,3) \Rightarrow \dot{r} < 0 \quad \dot{\varphi} < 0$

$r \in (3,\infty) \Rightarrow \dot{r} > 0 \quad \dot{\varphi} > 0$

Trajektorien: an $r=2, r=3, r=0$ (stat. Punkte)



G_∞ von $(1,1)$ ist Kreis mit $r=2$

da $(x,y) = (1,1) \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\dot{r} > 0, \dot{\varphi} < 0$

P 24.4) $\dot{x} = (x^3 - 3x^2 - 4x)(y^4+1) =: p$ $\quad x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

$\dot{y} = (x - y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 4) =: q$ $\quad x = y^2 - 1$

$(y^4 - 2y^2 + 1) - 3y^2 - 3 - 4 = 0$

$y^4 - 5y^2 - 6 = 0$ $\quad u = y^2$

$u^2 - 5u - 6 = 0$

$u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \ldots}$

$u_1 = 6$ $\quad u_2 = -1$

$y = \pm\sqrt{6}$ $\quad y = \text{komplex}$

$\Rightarrow x = 5$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$ $\quad x_1 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{3}$

$x_2 = -1 \Rightarrow y = 0$

$P_1 = (0|1)$

$P_2 = (0|-1)$

$P_3 = (-1|0)$

$P_4 = (4|\sqrt{3})$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} (3x^2 - 6x - 4)(y^4+1) & (x^3 - 3x^2 - 4x)4y^3 \\ (x^2 + y^2 + 1) + (x - y^2 + 1)(2x) & -2y(x^2 + y^2 + 1) + (x - y^2 + 1)2y \end{pmatrix}$$

$A(0|1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -8-\lambda & 0 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 32 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 32} < 0$

anziehender Knoten

$A(0|-1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -8-\lambda & 0 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 32 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{36} \gtrless 0$

Sattelpunkt

$A(-1|0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Singulär $\Rightarrow$ keine Aussage möglich

$A(4|\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 520 & 0 \\ 22 & -44\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 520 \quad \lambda_2 = -44\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

25.4) $= 23.4$

H 3.1) ges: max Intervall-Lsg.

$$\dot{x} = e^{x+t} \quad , x(1) = 3$$

$$\frac{dx}{dt} = e^x e^t$$

$$\frac{dx}{e^x} = e^t dt \quad \Big| \int$$

$$-e^{-x} = e^t + c$$

$$e^{-x} = -e^t - c \quad | \ln$$

$$-x = \ln(-e^t - c) \qquad -e^t - c > 0 \Leftrightarrow e^t + c < 0 \Leftrightarrow \boxed{t < \ln(-c)}$$

$$x = -\ln(-e^t - c)$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{-e^t - c}\right)$$

AWP: $3 = \ln\left(\frac{1}{-e-c}\right)$

$$e^3 = \frac{1}{-e-c}$$

$$e^3(-e-c) = 1$$

$$-e^4 - ce^3 = 1$$

$$c = -\frac{e^4+1}{e^3} \qquad \Rightarrow \text{max Int: } \left(-\infty, \ln\left(\frac{1+e^4}{e^3}\right)\right)$$

max Lsg: $x = \ln\left(\frac{1}{-e^t + \frac{e^4+1}{e^3}}\right)$

$\dot{x}$ hat bei Intervallgrenze Unbeschränktheitsstelle $\left(t = \ln\left(\frac{1+e^4}{e^3}\right)\right)$

H 8.1) $\dot{x} = e^x \cos(t) \qquad x(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = e^x \cos(t)$$

$$\frac{dx}{e^x} = \cos(t)\,dt \quad \Big| \int$$

$$-e^{-x} = \sin(t) + c$$

$$-x = \ln(-\sin t - c) \qquad -\sin t - c > 0 \Leftrightarrow \sin t < -c \qquad t \in \mathbb{R} \checkmark$$

$\cancel{t < \arcsin(c)}$

$$x = \ln \frac{1}{(-\sin t - c)}$$

AWP: $0 = \ln \frac{1}{-1-c} \Rightarrow c = 2 \qquad$ max Int. L: $x = \ln \frac{1}{-\sin t + 2}$

auf $(-\infty, \cancel{\arcsin(2)}\ \infty)$

H 10.1) $\dot{x} = \frac{t+1}{t-1} x^2$, $x(2) = 0$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{t+1}{t-1}\,dt \quad \Big| \int$$

$$-\frac{1}{x} = t + 2\int \frac{1}{t-1}\,dt + c$$

$$-\frac{1}{x} = t + 2\ln(t-1) + c \qquad \boxed{t > 1}$$

$$x = -\frac{1}{(t + 2\ln(t-1) + c)}$$

$\cancel{x = \sqrt[3]{\frac{1}{-t - 2\ln(t-1) - c}}}$

$\cancel{0 = \sqrt[3]{-6/-3c}}$ $\quad \frac{1}{-2 - 2\ln(1) - c} = \frac{1}{-2-c}$ ↯

$f(t,x) := \frac{t+1}{t-1} x^2$ diffbar $\forall x \in \mathbb{R}$, also auch Lipschitz

$\Rightarrow \exists!$ eindeutige max I.-Lösung

$x(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ist Lösung des AWPs und wegen Eindeutigkeit die einzige.

M 11.1) $\dot{x} = x^3 t e^{-t^2}$ $\qquad x(0) = 1$

$$\frac{dx}{dt} = x^3 t e^{-t^2}$$

$$\frac{dx}{x^3} = t e^{-t^2} dt \quad \Big| \int$$

$$-\frac{1}{2x^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2} + c$$

$$x^2 = \frac{1}{e^{-t^2} - 2c}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{e^{-t^2} - 2c}} \qquad e^{-t^2} - 2c > 0 \rightarrow e^{-t^2} > 2c \quad \checkmark \; c = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} t^2 > \ln\left(\frac{1}{2c}\right) \\ t > \pm\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2c}\right)} \end{array} \right)$$

AWP: $1 = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2c}} \Rightarrow c = 0$

max Lsg $x = \dfrac{1}{\sqrt{e^{-t^2}}}$ auf $(-\infty, \infty)$

$$x = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$f(t,x) = x^3 t e^{-t^2}$ ist diffb. also auch Lipschitz auf ganz $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \exists$ eindeutige max I-Lösung

12.1.) $\dot{x} + \frac{x^2}{t} = 1 \quad , x(1) = 2$

$\frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{t} = 1$

$dx = (1 - \frac{x^2}{t})\, dt$

?

Angabefehler!

hom:

$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^2}{t}$

$\frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{t}\, dt$

$+\frac{1}{x} = +\ln t \; \mp c$

$x = \frac{1}{\ln t - c}$ hom desp.

Var. d. konst.:

$x_p(t) = \frac{1}{\ln t - c(t)}$???

$\dot{x}_p(t) = -[\ln t - c(t)]^{-2} \cdot (\frac{1}{t} - \dot{c}(t))$

$-[\ln t - c(t)]^{-2} \cdot (\frac{1}{t} - \dot{c}(t)) +$

Danke Günther! :-)

R 182=192) $\dot{x} = 3x - 4y$
$\dot{y} = -2x + y$

$x(0) - 2y(0) = 1$
$x(0) - y(0) = 2 - x(1)$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}}_{:=A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}}_{:=B}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}(0) + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{:=C}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix}3-\lambda & -4\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda \cancel{+2} -5 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix}-2 & -4\\ \cancel{-2} & \cancel{-4}\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to ER(\lambda_1) = \left[\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix}4 & -4\\ \cancel{-2} & \cancel{2}\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to ER(\lambda_2) = \left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

$$WM = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2e^{5t} & e^{-t}\\ e^{5t} & e^{-t}\end{pmatrix}$$

allg. Lsg: $\sigma_1\begin{pmatrix}-2e^{5t}\\ e^{5t}\end{pmatrix} + \sigma_2\begin{pmatrix}e^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\sigma_1 + \sigma_2\\ 1\sigma_1 + \sigma_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2e^5\sigma_1 + e^{-1}\sigma_2\\ e^5\sigma_1 + e^{-1}\sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_1 - 2\sigma_2\\ -2\sigma_1 + \cancel{\sigma_2} - \sigma_1 - \cancel{\sigma_2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -2e^5\sigma_1 + e^{-1}\sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4\sigma_1 - \sigma_2\\ -3\sigma_1 - 2e^5\sigma_1 + e^{-1}\sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cc}-4 & -1\\ -3-2e^5 & e^{-1}\end{array}}_{:=F}\left|\begin{array}{c}1\\ 2\end{array}\right. \qquad F_1 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & e^{-1}\end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix}-4 & 1\\ -3-2e^5 & 2\end{pmatrix}$$

Cramer: $\sigma_1 = \dfrac{\det F_1}{\det F} = \dfrac{e^{-1} + 2}{-4e^{-1} - 3 - 2e^5}$

$$\sigma_2 = \frac{\det F_2}{\det F} = \frac{2e^5 - 5}{-4e^{-1} - 3 - 2e^5}$$

R 23.3) $\dot{x} = 3x - 4y$

$\dot{y} = x + 3y$

RB: $x(0) + y(0) - y(1) = 1$

$x(0) - 2x(1) + y(0) = 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{:= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = \lambda^2 - 6\lambda + 13$

$\lambda_1 = 3 + 2i$

$\lambda_2 = 3 - 2i$

$$\begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{i} \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Er(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Er(\lambda_2) = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{WM: } \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{3t} e^{-2it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i e^{3t} e^{2it} & -2i e^{3t} e^{-2it} \\ e^{3t} e^{2it} & e^{3t} e^{-2it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \text{ allg. Lsg}$$

$$\text{reelle Lsg: } \begin{pmatrix} -2e^{3t} \sin(2t) & -2e^{3t} \sin(2t) \\ e^{3t} \cos(2t) & e^{3t} \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{RWP: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i\sigma_1 - 2i\sigma_2 \\ \sigma_1 + \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2ie^3 e^{2i} \sigma_1 & -2ie^3 e^{-2i} \sigma_2 \\ e^3 e^{2i} \sigma_1 & + e^3 e^{-2i} \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2i\sigma_1 - 2i\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2i\sigma_1 - 2i\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^3 e^{2i} \sigma_1 - e^3 e^{-2i} \sigma_2 \\ -4ie^3 e^{2i} \sigma_1 + 4i e^3 e^{-2i} \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 (2i + 1 - e^3 e^{2i}) + \sigma_2 (-2i + 1 - e^3 e^{-2i}) \\ \sigma_1 (2i + 1 - 4ie e^{3 2i}) + \sigma_2 (-2i + 1 + 4ie^3 e^{-2i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2i + 1 - e^3 e^{2i} & -2i + 1 - e^3 e^{-2i} \\ 2i + 1 - 4ie^3 e^{2i} & -2i + 1 + 4ie^3 e^{-2i} \end{pmatrix}}_{:= F} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2i + 1 - e^3 e^{-2i} \\ 0 & -2i + 1 + 4ie^3 e^{-2i} \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 2i + 1 - e^3 e^{2i} & 1 \\ 2i + 1 - 4ie^3 e^{2i} & 0 \end{pmatrix}$$

Cramer: $\sigma_1 = \dfrac{\det F_1}{\det F}$

$\sigma_2 = \dfrac{\det F_2}{\det F}$

$\det F = -8ie^6 + 7e^3(e^{2i} - e^{-2i}) + 4ie^3(e^{2i} - e^{-2i}) + 2ie^3(e^{2i} - e^{-2i})$

$= -8ie^6 + e^3(\cancel{7\cos 2} + 7i\sin 2 + 6i\cos 2 - \cancel{6\sin 2} - \cancel{7\cos 2} + 7i\sin 2 + 6i\cos 2 + \cancel{6\sin 2})$

$= -8ie^6 + e^3 i(12\cos 2 + 14\sin 2) \neq 0$

$\Rightarrow R(W)$ regulär $\Rightarrow \exists!$ Lösg. d. RWs.

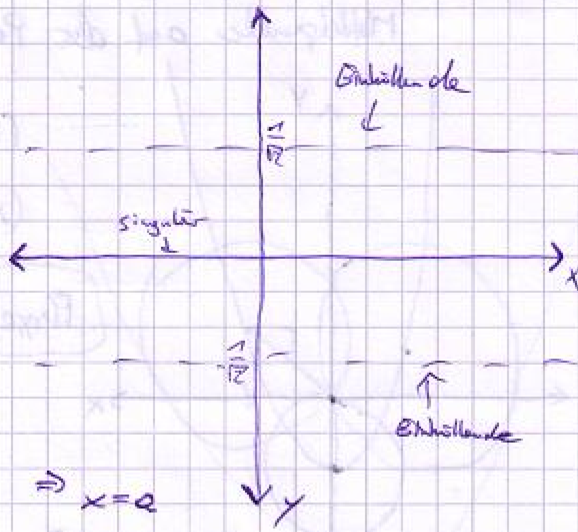
E 7.1) Einhüllende der Kurvenschar $(x-a)^2+2y^2=1$

I: $F(x,y,a) = (x-a)^2+2y^2-1=0$

II: $\frac{\partial F}{\partial a} = -2(x-a) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=a}$

Einsetzen in I: $2y^2-1=0$

$\Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

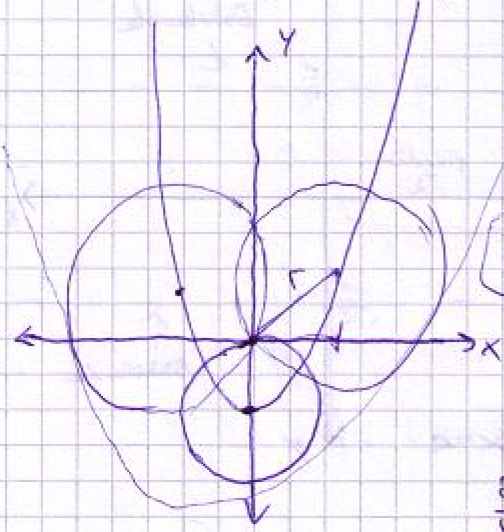


Singuläre Punkte: $\frac{\partial F}{\partial x} = -2(x-a)=0 \Rightarrow x=a$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y=0 \Rightarrow y=0$

singuläre Punkte gehören nicht zur ~~Einhüllende~~ Kurvenschar, d.h.: Einhüllende der Kurvenschar ist daher $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

E 13.1) Einhüllende der Schar der Kreise durch den Ursprung, deren Mittelpunkte auf der Parabel $y = 2x^2 - 1$ liegen



$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2$$

$$(x-a)^2+(y-2a^2+1)^2 = a^2+(2a^2-1)^2$$

$$\boxed{F(x,y,a) = (x-a)^2+(y-2a^2+1)^2-a^2-(2a^2-1)^2 = 0}$$

$$\cancel{x^2-2ax+a^2+y-2a^2+1-2a^2-4a^4+4a^2-1=0}$$

$$\cancel{x^2-2ax+2a^2-4a^4+y=0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \cancel{-2x+4a-16a^3=0} \quad -2(x-a)+2(y-2a^2+1)(-4a)-2a$$

$$\cancel{x=2a} \qquad -2(2a^2-1)(4a)$$

$$= -2x+\cancel{2a}-8ay+\cancel{16a^3}-\cancel{8a}-\cancel{2a}-\cancel{16a^3}+\cancel{8a}=0$$

$$-2(x+4ay)=0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 8ay \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{x}{4y}}$$

Einsetzen in $F(x,y,a)$: $\left(x+\frac{x}{4y}\right)^2+\left(y-2\frac{x^2}{16y^2}+1\right)^2-\frac{x^2}{16y^2}-\left(\frac{x^2}{8y^2}-1\right)^2=0$

$$x^2+\frac{x^2}{2y}+\cancel{\frac{x^2}{16y^2}}+y^2-4\frac{x^2}{8y}+y-\cancel{\frac{x^2}{8y}}+\cancel{\frac{x^4}{64y^4}}-2\frac{x^2}{16y^2}+y-\cancel{4\frac{x^2}{8y^2}}+\cancel{1}$$

$$-\cancel{\frac{x^2}{16y^2}}-\cancel{\frac{x^4}{64y^4}}+\cancel{\frac{x^2}{4y^2}}-\cancel{1}=0$$

$$x^2+\frac{x^2}{2y}+y^2+2y-\frac{x^2}{4y}-\cancel{\frac{x^2}{4y^2}}+\cancel{\frac{x^2}{4y^2}}=0$$

Einhüllende: $\boxed{x^2+\frac{x^2}{4y}+y^2+2y=0}$ $\quad y \neq 0$

Sing. Pkte: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-a) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=a}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y-4a^2+2=0 \Leftrightarrow \boxed{y=2a^2-1}$ ist genau Gleichung der Parabel,

d.h. sing. Pkte = Parabel; erfüllt nicht die Gleichung der Einhüllenden

E (4.1) $x^2+2ax-(y+a)^2=2a$

$$F(x,y,a) = x^2+2ax-(y+a)^2-2a=0$$

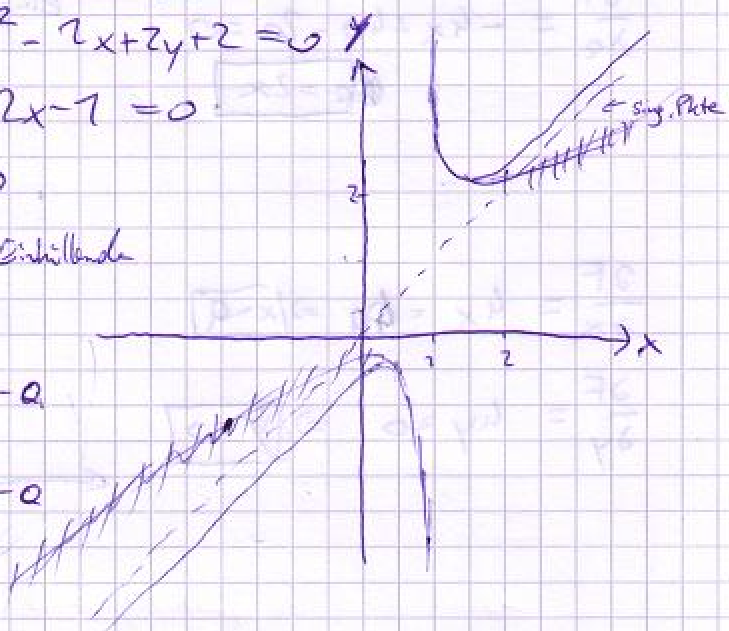
$$\frac{\partial F}{\partial a} = \cancel{2}x-\cancel{2}y-\cancel{2}a-\cancel{2}=0 \Leftrightarrow \boxed{a=x-y-1}$$

Einsetzen: $x^2+2x^2-2xy-2x-(x-1)^2-2x+2y+2=0$

$$3x^2-2xy-4x+2y+2-x^2+2x-1=0$$

$$2x^2-2xy-2x+1+2y=0$$

$$\boxed{y=\frac{2x-2x^2-1}{2-2x}}$$ Einhüllende



Sing. Pkt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x+2a=0 \Leftrightarrow x=-a$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y-2a=0 \Leftrightarrow y=-a$$

$$-a=\frac{-2a-2a^2-1}{2+2a}$$

$$-2a-2a^2=-2a-2a^2-1$$

$$0=-1 \quad ↯$$

Einhüllende schneidet keine sing. Punkte.

E 24.1) $2(x-a)^2+2y^2=a^2$

$F(x,y,a)=2(x-a)^2+2y^2-a^2=0$

$\frac{\partial F}{\partial a}=-4x+4a-2a=0$

$\boxed{a=2x}$

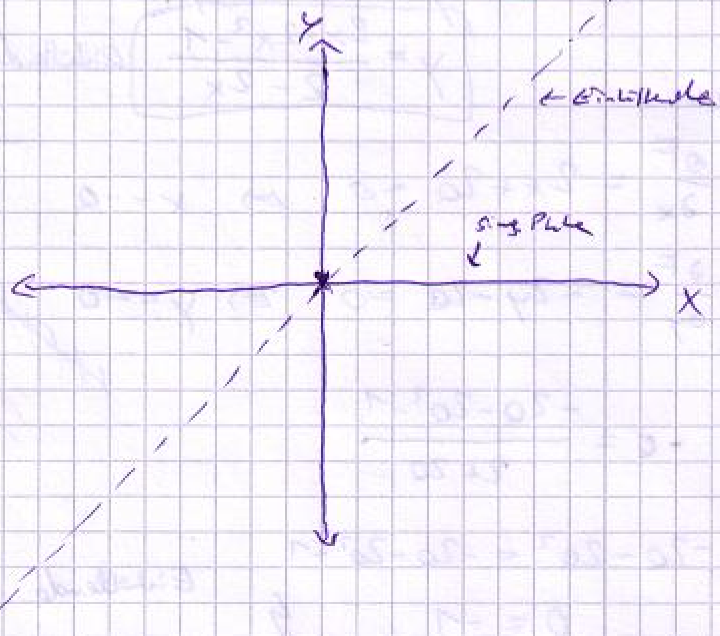
Einsetzen: $2(-x)^2+2y^2-4x^2=0$

$-2x^2=-2y^2$

$x^2=y^2 \Leftrightarrow \boxed{y=\pm x}$

$\frac{\partial F}{\partial x}=4x=4a \Rightarrow \boxed{x=a}$

$\frac{\partial F}{\partial y}=4y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$



26.1) $x^2+2ax-(y+a)^2-2a=0$

$\frac{\partial F}{\partial a}=2x-2y-2a-2=0$

$\boxed{a=x-y-1}$

Einsetzen: $x^2+2x^2-2xy-2x-(x-1)^2-2x+2y+2=0$

$3x^2-2xy-2x-x^2+\cancel{2x}-1-\cancel{2x}+2y+2$

$2x^2-2xy-2x+2y+1=0$

$y=\frac{2x-2x^2-1}{2-2x}$

siehe 14.1

E 27.1) $F(x,y,a) = (y+a)^2 + x^2 + 2ax - 2a = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \cancel{2}y + \cancel{2}a + \cancel{2}x - \cancel{2} = 0$$

$$a = 1 - x - y$$

Einsetzen: $(\cancel{y}\,1-x)^2 + x^2 + 2x - 2x^2 - 2xy - 2 + 2x + 2y = 0$

$$1 - \cancel{2x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + \cancel{2x} - \cancel{2x^2} - 2xy - 2 + 2x + 2y = 0$$

$$2x + 2y - 2xy - 1 = 0$$

$$y = \frac{1-2x}{2-2x} = 1 - \frac{1}{2-2x} \quad \text{(Teil-)Einhüllende}$$

sing. Pkte: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{x = -a}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{y = -a}$$

$$a^2 - 2a^2 - 2a = 0$$

$$a^2 + 2a = 0 \quad a_1 = 0, \; a_2 = -2$$

$$-a = \frac{1+2a}{2+2a} \quad \Big| \cdot (2+2a)$$

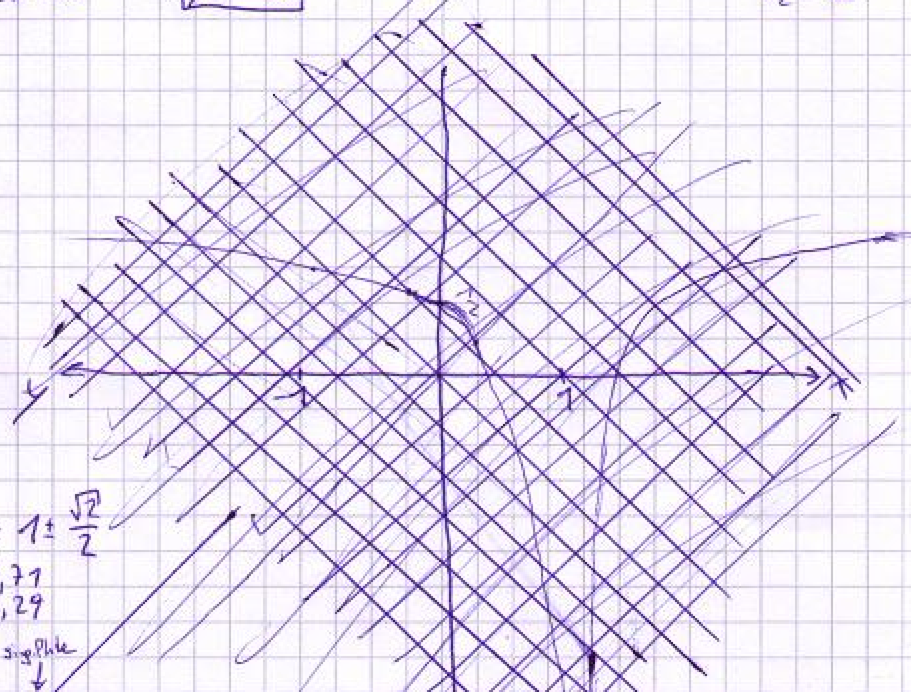
$$-2a - 2a^2 = 1 + 2a$$

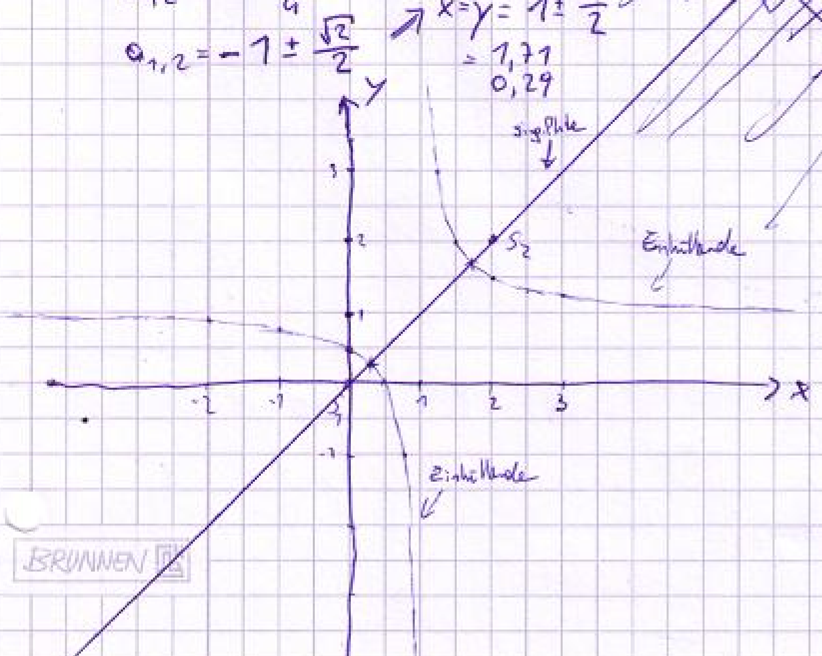
$$2a^2 + 4a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4}$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{4}$$

$$a_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = y = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}71;\ 0{,}29$$





Sonstiges 4.2) Bestimmen Sie alle Lösungen der DG $\ddot{x} + \cosh(t)\dot{x} - (1+\sinh(t))x = 0$

errate $\varphi = \cosh t$ $\left(\text{da } \cancel{\cosh} + \cancel{\cosh\sinh} - \cancel{\cosh} - \cancel{\sinh\cosh} = 0 \checkmark \right)$

<u>Reduktionsverfahren für homogene Gleichungen:</u>

Basis des Lsgraumes ist geg durch $\{\varphi, \sigma_1\varphi\}$

einsetzen von $\underbrace{\sigma_1(t)\varphi(t)}_{\psi(t)}$ in urspr. Glg:

$$\dot\psi(t) = \dot\sigma_1(t)\varphi(t) + \sigma_1(t)\dot\varphi(t) = \underline{\dot\sigma_1(t)\cosh t + \sigma_1(t)\sinh(t)}$$

$$\ddot\psi(t) = \ddot\sigma_1(t)\cosh(t) + \dot\sigma_1(t)\sinh(t) + \dot\sigma_1(t)\sinh(t) + \sigma_1(t)\cosh(t)$$

$$= \cosh t(\ddot\sigma_1(t) + \sigma_1(t)) + 2\dot\sigma_1(t)\sinh t$$

$\dot\sigma = \tau$ $\begin{pmatrix}\sigma_1(t) = \sigma \\ \dot\sigma_1(t) = \tau \\ \ddot\sigma_1(t) = \dot\tau\end{pmatrix}$

$$\cosh t(\dot\tau + \cancel{\sigma}) + 2\tau\sinh t + \cosh t(\tau\cosh t + \cancel{\sigma\sinh t}) - \cancel{\sigma\cosh t(1+\sinh t)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot\tau\cosh t + 2\tau\sinh t + \tau\cosh^2 t = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot\tau\cosh t = -\tau(2\sinh t + \cosh^2 t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot\tau}{\tau} = -\frac{2\sinh t + \cosh^2 t}{\cosh} = -2\tanh t - \cosh t$$

$$\Leftrightarrow \ln\tau = -2\int\tanh\,dt - \sinh t = -2\ln(\cosh t) - \sinh t$$

$$\Leftrightarrow \tau = e^{\ln\frac{1}{\cosh^2 t} - \sinh t} = \frac{1}{\cosh^2 t}\cdot e^{-\sinh t}$$

spez Lsg für $\vec\sigma$ $\quad \sigma = \int\tau\,dt = \int_0^t \frac{e^{-\sinh v}}{\cosh^2 v}\,dv \Rightarrow \psi(t) = \cosh t\int_0^t \frac{e^{-\sinh v}}{\cosh^2 v}\,dv$

<u>Lösungsbasis:</u> $\left\{\cosh t,\ \cosh t\int_0^t \frac{e^{-\sinh u}}{\cosh^2 u}\,du\right\}$ alle Lsg sind die L-Komb.

BRUNNEN

Sonstiges

6.2) allg. Lsg: $\dot{x} = x\cos(t) - (\sin(t) - 1)y$

$\dot{y} = (\cos(t) - 1)x - y\sin(t)$

errate $\varphi = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Reduktion: Lsg der Form $\psi = \sigma(t) \cdot \varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau(t) \end{pmatrix}$

dh: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t)\sin t \\ c(t)\cos t + \tau(t) \end{pmatrix}$

Einsetzen in System: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}\sin t + c\cos t \\ \dot{c}\cos t - c\sin t + \dot{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\sin t\cos t - (\sin t - 1)(c\cos t + \tau) \\ c\sin t(\cos t - 1) - \sin t(c\cdot\cos t + \tau) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{c}\sin t + \cancel{c\cos t} \\ \dot{c}\cos t - \cancel{c\sin t} + \dot{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cancel{\sin t\cos t} - c\cancel{\sin t\cos t} - \sin t\,\tau + \cancel{c\cos t} + \tau \\ c\cancel{\sin t\cos t} - \cancel{c\sin t} + c\cancel{\sin t\cos t} - \sin t\,\tau \end{pmatrix}$

I: $\dot{c}\sin t = -\sin t\,\tau + \tau$

II: $\dot{c}\cos t + \dot{\tau} = -\sin t\,\tau$

$\frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{\cancel{\dot{c}}\cos t}{\cancel{\dot{c}}\sin t} = \frac{-\dot{\tau} - \sin t\,\tau}{\tau(1 - \sin t)} \Rightarrow \cot(t)\cdot\tau(t)(1 - \sin(t)) = -\dot{\tau} - \sin t\,\tau$

$\Leftrightarrow \dot{\tau} = \tau(-\sin t - \cot(t) + \cos t)$

$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \cos t - \sin t - \cot t$

$\ln\tau = \int\cos t - \int\sin t - \int\cot t = \sin t + \cos t - \ln|\sin t|$

$\tau = e^{\sin t + \cos t} \cdot \frac{1}{\sin t}$

I $\rightsquigarrow$ $\dot{c}\sin t = \tau(t)(1 - \sin t)$

$\dot{c}(t) = \frac{(1 - \sin t)e^{\sin t + \cos t}}{\sin^2 t}$

$$\boxed{\text{allg. Lsg: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = W(t)\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sin t & \int \frac{(1-\sin t)e^{\sin t + \cos t}}{\sin^2 t}\,dt \cdot \sin t \\ \cos t & \int \frac{(1-\sin t)e^{\sin t + \cos t}}{\sin^2 t}\,dt \cdot \cos t + \frac{e^{\sin t + \cos t}}{\sin t} \end{pmatrix}}$$

Sonstiges 7.) $t^2(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 0$, $y(2) = 5$, $\dot{y}(2) = 6$

Reduktionsverfahren für hom. Glg:

spez. Lsg: $\varphi(t) = t$ $\rightarrow$ Lösungsbasis $= \{t, \underbrace{\sigma(t)\cdot t}_{=:\psi(t)}\}$

$\dot{\psi}(t) = \dot{\sigma}(t)\cdot t + \sigma(t) = t\cdot\tau + \sigma$ $\qquad \tau = \dot{\sigma}$

$\ddot{\psi}(t) = \ddot{\sigma}(t)t + \dot{\sigma}(t) + \dot{\sigma}(t) = \dot{\tau}\cdot t + 2\tau$

Einsetzen in Glg: $t^2(t-1)(t\dot{\tau} + 2\tau) - t(t\tau + \cancel{\sigma}) + \cancel{\sigma t} = 0$

$t^4\dot{\tau} + 2t^3\tau - t^3\dot{\tau} - 2t^2\tau - t^2\tau = 0$

$\dot{\tau}(t^4 - t^3) + \tau(2t^3 - 3t^2) = 0$

$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{3t^2 - 2t^3}{t^4 - t^3} = \frac{3-2t}{t^2-t}$ $\qquad | t \neq 0, t \neq 1$

$\Leftrightarrow \ln\tau = \int \frac{3-2t}{t^2-t}$

NR: $3\int\frac{1}{t(t-1)} - 2\int\frac{1}{t-1} = 3\left(\int\frac{dt}{t-1} - \int\frac{dt}{t}\right) - 2\ln|t-1|$

$= \cancel{3}\ln|t-1| - 3\ln|t| - 2\ln|t-1| = \ln\left|\frac{t-1}{t^3}\right|$

$\tau = \frac{t-1}{t^3}$

$\rightarrow \sigma(t) = \int\tau\,dt = \int\frac{dt}{t^2} - \int\frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$ $\quad \rightarrow \psi(t) = \frac{1}{2t} - 1$

$\rightarrow$ Lösungsbasis $= \{t, \frac{1}{2t} - 1\}$

allg. Lsg $= c_1 t + c_2\left(\frac{1}{2t} - 1\right) =: \varphi_a(t)$, $\dot{\varphi}_a(t) = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2t^2}\right)$

AWP Gleichungssystem

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -\frac{3}{4} & 5 \\ 1 & -\frac{1}{8} & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{8} & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{31}{4} \\ 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{31}{4}t + 14\left(\frac{1}{2t} - 1\right)}$$

Sonstiges

9.1) $\dot{x} = -3\sin(t)x - \frac{e^{3\cos t}}{t}$ $\quad t \neq 0$

$\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$

1) hom. System φ_h: $\dot{x} = -3x\sin t$

$$\frac{\dot{x}}{x} = -3\sin t \iff \ln x = 3\cos t + c_1$$

$$x = e^{3\cos t} \cdot c_2 =: \varphi_h(t) \qquad c_2 > 0$$

2) part Lsg inh. φ_p

$$\varphi(t) = c(t) \cdot e^{3\cos t}$$

Einsetzen: $\dot{c}\, e^{3\cos t} - \cancel{c\, 3\sin t\, e^{3\cos t}} = \cancel{-3\sin(t)\, c \cdot e^{3\cos t}} - \frac{e^{3\cos t}}{t}$

$$\iff \dot{c} = -\frac{1}{t} \rightsquigarrow c(t) = \ln\left|\frac{1}{t}\right|$$

$$\varphi(t) = c_2 \cdot e^{3\cos t} + e^{3\cos t}\ln\left|\frac{1}{t}\right| = e^{3\cos t}(c_2 - \ln t) \qquad t \in (0, \infty)$$

Sonstiges 11.3) Stabilitätsverhalten der Lösung $x = \sinh t$

$$\ddot{x} + (1-t)\dot{x} + (t-2)x = (1-t)e^{-t}$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = (t-1)y + (2-t)x + (1-t)e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2-t & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (1-t)\, e^{-t} \end{pmatrix}$$ äquivalentes System

$x(t) = y(t) = e^t$

Spez. Lsg

$$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \cancel{- te^t} \cancel{+ te^t} - e^t \end{pmatrix} \checkmark$$

$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ ist Spalte der Wronski-Matrix

$\xrightarrow{t \to \infty}$ unbeschränkt

$\Rightarrow$ Lösungen instabil

Sonstiges

B.2) $\dot{x} = 1 - \frac{2y}{t^2}$

$\dot{y} = t - x$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{t^2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$$

hom System: $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{t^2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

Ansatz: $y = t^z \ (z \in \mathbb{Z}) \quad \dot{y} = z t^{z-1} = -x \Rightarrow x = -z t^{z-1}$

$$-2\cancel{t^{z-2}} = z(1-z)\cancel{t^{z-2}}$$

$$z^2 - z - 2 \iff z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \quad \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

liefert 2 spezielle Lösungen $\begin{pmatrix}-2t\\ t^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{t^2}\\ \frac{1}{t}\end{pmatrix}$

allg. Lsg hom: $\varphi_h = \underbrace{\begin{pmatrix}-2t & \frac{1}{t^2}\\ t^2 & \frac{1}{t}\end{pmatrix}}_{W(t)} \cdot \vec{\sigma}$

partikuläre Lsg des inhom. Systems: $\varphi_p = W(t)\cdot\sigma(t)$

$$\varphi_p = \begin{pmatrix}-2t\sigma_1 + \frac{1}{t^2}\sigma_2\\ t^2\sigma_1 + \frac{1}{t}\sigma_2\end{pmatrix} \qquad \dot{\varphi}_p = \begin{pmatrix}-2\sigma_1 - 2t\dot{\sigma}_1 - 2\frac{1}{t^3}\sigma_2 + \frac{1}{t^2}\dot{\sigma}_2\\ 2t\sigma_1 + t^2\dot{\sigma}_1 - \frac{1}{t^2}\sigma_2 + \frac{1}{t}\dot{\sigma}_2\end{pmatrix}$$

Einsetzen: $\cancel{-2\sigma_1} - 2t\dot{\sigma}_1 - \cancel{2\frac{1}{t^3}\sigma_2} + \frac{1}{t^2}\dot{\sigma}_2 = \cancel{-2\sigma_1} - \cancel{2\frac{1}{t^3}\sigma_2} + 1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{t^2}\dot{\sigma}_2 = 1 + 2t\dot{\sigma}_1$

$\cancel{2t\sigma_1} + t^2\dot{\sigma}_1 - \cancel{\frac{1}{t^2}\sigma_2} + \frac{1}{t}\dot{\sigma}_2 = \cancel{2t\sigma_1} - \cancel{\frac{1}{t^2}\sigma_2} + t \qquad \Rightarrow t^2 - t^3\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2$

gleichsetzen: $\cancel{t^2} - t^3\dot{\sigma}_1 = \cancel{t^2} + 2t^3\dot{\sigma}_1 \qquad \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\dot{\sigma}_1 = 0\\ \dot{\sigma}_2 = t^2\end{matrix}} \rightarrow \sigma_2 = \frac{t^3}{3}$

$$\varphi_p(t) = \begin{pmatrix}-2t & \frac{1}{t^2}\\ t^2 & \frac{1}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{t^3}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{t}{3}\\ \frac{t^2}{3}\end{pmatrix}$$

allg. Lösung: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p = W(t)\cdot\vec{\sigma} + \begin{pmatrix}\frac{t}{3}\\ \frac{t^2}{3}\end{pmatrix}$

15.1) $y = x(1+y') + y'^2$ allg. Lsg.? D'Alembert

Parametrisierung nach $y' = p$ $\quad \frac{dy}{dx} = p \quad \Big| \frac{dx}{dp}$

$\rightsquigarrow y = x(1+p) + p^2 \quad \Big| \frac{d}{dp}$ $\quad \frac{dy}{dp} = p \cdot \frac{dx}{dp} \Leftrightarrow \dot{y} = p\dot{x}$

I $\dot{y} = \dot{x}(1+p) + x + 2p$

II $\dot{y} = p\dot{x}$

$\Rightarrow \cancel{p\dot{x}} = \dot{x} + \cancel{\dot{x}p} + x + 2p$

$\dot{x} = -x - 2p$

homL: $\dot{x} = -x$ $\quad \boxed{x = ce^{-p} =: \varphi_h(p)}$, $c \in \mathbb{R}$

inhomL: Var. d. K. $\quad \varphi(p) = c(p)\varphi_h(p) = c(p)e^{-p}$

Einsetzen: $\dot{c}(p)e^{-p} - \cancel{c(p)e^{-p}} = -\cancel{c(p)e^{-p}} - 2p$

$\dot{c}(p) = -2pe^{p}$

$c(p) = -2\int pe^{p}dp = -2\left(e^{p}\cdot p - \int e^{p}dp\right) = -2e^{p}p + 2e^{p} = \underline{\underline{2e^{p}(1-p)}}$

$\boxed{\varphi_p = 2 - 2p}$

allg. Lsg: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p = \underline{\underline{ce^{-p} - 2p + 2}}$

Sonstiges

23.1) $y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$

Parametrisierung: $y' = p \rightarrow \quad y = xp + \sqrt{1+p^2}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = p \quad \Big| \frac{dx}{dp}$

$$\dot{y} = \dot{x}p + x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \qquad \dot{y} = p \cdot \dot{x}$$

gleichsetzen: $\cancel{\dot{x}p} + x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \cancel{p \cdot \dot{x}} \quad \Rightarrow \boxed{x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}$

$$y = xp + \sqrt{1+p^2} = \frac{-p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2} = \frac{\cancel{-p^2} + 1 + \cancel{p^2}}{\sqrt{1+p^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = y}$$

$x^2 = \frac{p^2}{1+p^2}$

nicht notwendig

$x^2 + x^2p^2 = p^2$

$\frac{x^2}{1-x^2} = p^2 \quad \Rightarrow p = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\left(y = \pm \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;\hat{=}\; \left| \begin{array}{l} u = (-x^2+1) \\ du = -2x\,dx \end{array} \right| \;\hat{=}\; \frac{\pm 1}{-2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} = \pm \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{1-x^2} \right)$$

Zusätzlich sind alle Geraden $y = xc + \sqrt{1+c^2}$, $c \in \mathbb{R}$ Lösungskurven. Durch Zusammensetzen von Teilen dieser Lösungskurven erhält man alle Lösungen.

Sonstiges 9.3) $\dot{x} = y\cdot(x^2-y^2)$

$\dot{y} = -x(x^2+y)$

Gleichgewichtslage: $0 = y(x^2-y^2)$, $0 = -x(x^2+y)$ $\Rightarrow x=y=0$ bzw $x^2=-y=y^2 \Rightarrow y=-1,\ x=\pm 1$

$\Rightarrow (0,0), (1,-1), (-1,-1)$ einzige GGL.

$$A = \begin{pmatrix} 2xy & x^2-3y^2 \\ -3x^2-y & -x \end{pmatrix}$$

$A(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad p(\lambda) = \lambda^2+3\lambda-2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$

$\Rightarrow$ instabil

$A(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p(\lambda) = \lambda^2-3\lambda-2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$

instabil

Beh: $(0,0)$ instabil:

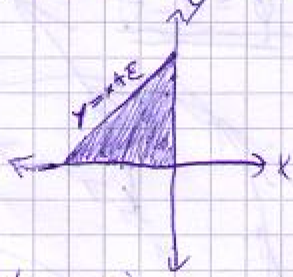
a) $V(t,x)=0$ $\quad \forall t\geq 0$ $\quad \forall x \in K_\sigma(0) \cap \mathrm{Rd}\,X$

b) $V(t,x)$ ist auf $[0,\infty)\times X$ pos. und beschränkt, dh $V(t,x)\leq S$

c) $\dot{V}(t,x) \geq \alpha(V(t,x))$ auf $[0,\infty)\times X$ für $\alpha \nearrow$ $\quad \alpha: [0,S]\to\mathbb{R}$ mit $\alpha(u)=0 \Leftrightarrow u=0$

e) $0 \in \mathrm{Rd}\,X$

Sei $V := -x(x+y) = -(x^2+xy)$ und $X = \{(x,y) : 0 < -x < y < \varepsilon\}$



a) $V(x,y)=0$ $\quad \forall (x,y) \in K_\sigma(0) \cap \mathrm{Rd}\,X$ ✓

b) $V(x,y) = \underset{\geq 0}{-x}\ \underset{>0}{(x+y)}$ ist auf $[0,\infty)\times X$ pos. und beschränkt ✓

c) $\dot{V}(x,y) = -(2x+y)\cdot y(x^2-y^2) + x^2(x^2+y) = -2x^3y - x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 + x^4 + x^2y$

Beh: $\dot{V}(x,y) \geq V(x,y)^2 = (-x(x+y))^2$ $\quad$ subst $x=-a,\ y=a+b \Rightarrow 0<a<a+b<\varepsilon$

Bew $\dot{V}(x,y) = 2a^3(a+b) - a^2(a+b)^2 - 2a(a+b)^3 + (a+b)^4 + a^4 + a^2(a+b) =$

$= a^4 + a^3(1-2b) + a^2b(1-b) + 2ab^3 + b^4 \geq$ $\quad$ für $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, dh $b \leq \frac{1}{2}$

$\geq a^4 + a^3 + a^2b + 2ab^3 + b^4 \geq a^2(a^2+a) + ab(a+2b^2) + b^2(b^2) \geq a^2+2ab+b^2 =$

$= (a+b)^2 = (-x(x+y))^2$ ✓

e) $0 \in \mathrm{Rd}\,X$ ✓

Alle Gleichgewichtslagen sind instabil.

sonstiges oder ?

24.3)

$\dot{x} = (x^2+y^2-1)(x^3+xy^2-4x+y)$ $\qquad r\dot{r} = x\dot{x}+y\dot{y}$ $\qquad x = r\cos\varphi$

$\dot{y} = (x^2+y^2-1)(y^3+x^2y-4y-x)$ $\qquad r^2\dot{\varphi} = x\dot{y}-y\dot{x}$ $\qquad y = r\sin\varphi$

$$r\dot{r} = r\cos\varphi\,(r^2-1)(x^3+xy^2-4x+y) + r\sin\varphi\,(r^2-1)(y^3+x^2y-4y-x)$$

$$r\dot{r} = (r^2-1)(x^4+y^4+2x^2y^2-4x^2-4y^2)$$

$$r\dot{r} = (r^2-1)\Big(\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}{}^2-4r^2\Big)$$

$$r\dot{r} = r^6-r^4-4r^4+4r^2 \qquad |:r$$

$$\underline{\dot{r} = r^5-5r^3+4r}$$

$r\neq 0 \to r^4-5r^2+4=0$

$u_{1,2} = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{16}{4}}$

$u_1 = \frac{5}{2}+\frac{3}{2} = 4 \to r=(\pm)2$

$u_2 = \frac{5}{2}-\frac{3}{2} = 1 \to r=(\pm)1$

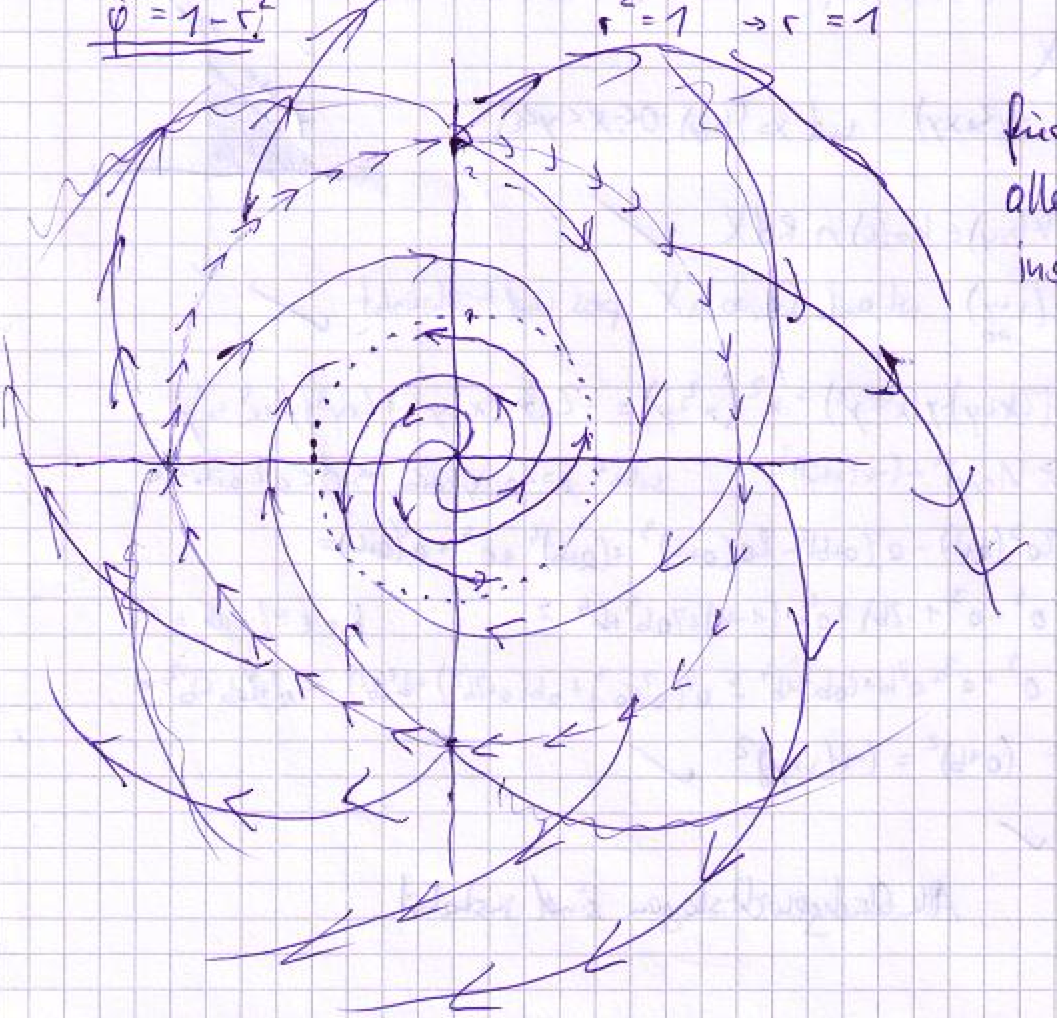
$$r^2\dot{\varphi} = (r^2-1)(yx^3+x^3y-4xy-x^2)-(r^2-1)(x^3y+xy^3-4xy+y^2)$$

$$r^2\dot{\varphi} = (r^2-1)(\cancel{yx^3}+\cancel{x^3y}-\cancel{4xy}-x^2-\cancel{x^3y}-\cancel{xy^3}+\cancel{4xy}-y^2)$$

$$r^2\dot{\varphi} = -r^2(r^2-1)$$

$$\underline{\dot{\varphi} = 1-r^2}$$

$r^2=1 \to r=1$



für $r=1$ stabil,
alle anderen ($r=0, r=2$)
instabil!