9.11.09

Differentialgleichungen UE

III, 58, 67, 71, 75, 79, 83, 87, 91

58) $\dot{x}\sin t + x = 0 \iff \dot{x} = -\frac{x}{\sin t}$ $\qquad t \neq k\pi$

$f(x,t)$ ist stetig auf $(k\pi, (k+1)\pi) \times \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ und erfüllt dort eine lokale LB. $\Rightarrow$ Zu jedem AWP mit $t_0 \in (k\pi, (k+1)\pi)$ gibt es genau eine maximale Lösung. (Wird von $t_0 = \pi$ aber nicht erfüllt!)

Trennung der Variablen:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sin t} \iff \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{\sin t} \qquad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}\sin t + x = 0 \iff \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{\sin t} + c$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \left| \begin{array}{l} \tan\frac{t}{2} = u \\ \frac{1}{2}(1+u^2)\,dt = du \end{array} \right| = \int \frac{1+u^2}{2u} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln\left|\tan\tfrac{t}{2}\right| + c$$

$$\iff \ln|x| = -\ln\left|\tan\tfrac{t}{2}\right| + c = \ln\left|\cot\tfrac{t}{2}\right| + c$$

$$\iff x = \cot\tfrac{t}{2} \cdot c \quad (c \in \mathbb{R}) \qquad t \neq 2k\pi$$

x ist also auch an Stellen $t = (2k+1)\pi$ definiert und es gilt:

$$\dot{x}\sin t + x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{für } t = k\pi$$

$$x = \cot\tfrac{t}{2} \cdot c = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot c = 0 \quad \text{für } t = (2k+1)\pi \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ max. Intervalllösung:

- $x(\pi) = 0$: $\quad x = \cot\frac{t}{2} \cdot c$ auf $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (2k\pi, 2(k+1)\pi)$ für bel. $c \in \mathbb{R}$

  $x = 0$ (trivial)

- $x(\pi) = 2$: $\quad$ Wegen $x(\pi) = 0$ $\forall c \in \mathbb{R}$ existiert keine Lösung.

71) $\dot{x}\cos t + x\sin t = 1 \iff \dot{x} = -x\,\dfrac{\sin t}{\cos t} + \dfrac{1}{\cos t}$ $\qquad t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

<u>Homogene Gleichung:</u>

$$\dot{x} = -x\,\frac{\sin t}{\cos t}$$

<u>Trennung der Variablen:</u>

$$\frac{dx}{dt} = -x\,\frac{\sin t}{\cos t} \iff \frac{dx}{x} = -\frac{\sin t}{\cos t}\,dt$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -x\,\frac{\sin t}{\cos t} \iff \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{\sin t}{\cos t}\,dt + c \qquad x \neq 0$$

$$\iff \ln|x| = \ln|\cos t| + c$$

$$\iff |x_h| = |\cos t|\cdot e^c$$

$$\iff x_h = \cos t\cdot c \qquad (c\in\mathbb{R})$$

<u>Variation der Konstanten:</u>

$$x_p = \cos t\cdot c(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_p = \cancel{-\sin t\cdot c(t)} + \cos t\cdot\dot{c}(t) = \cancel{-\cos t\cdot c(t)\cdot\frac{\sin t}{\cos t}} + \frac{1}{\cos t}$$

$$\iff \dot{c}(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow c(t) = \int\frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t.$$

$$\Rightarrow x_p = \cos t\cdot\tan t = \sin t$$

Gesamtlösung: $\quad x = x_h + x_p = \cos t\cdot c + \sin t \qquad (c\in\mathbb{R})$

<u>Ausgeschlossene Stellen:</u>

•) $x=0$ kommt als Lösung nicht infrage.

•) Für $t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ist $\cos t = 0$, $\sin t \in \{-1, 1\}$

$$\Rightarrow \dot{x}\cos t + x\sin t = 1 \iff x\sin t = 1 \iff x = \sin t \quad (\text{für } t = k\pi + \tfrac{\pi}{2})$$

$x = \cos t\cdot c + \sin t$ leistet also auf ganz $\mathbb{R}$ das Gewünschte.

75) $t\dot x - 4x = t\sqrt{x} \iff \dot x = \frac{4}{t}x + \sqrt{x}$ $\qquad x \geq 0,\ t \neq 0$

Bernoulli:
~~Riccati~~-DGL $\Rightarrow$ Substitution: $y = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \dot y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\dot x = \frac{2}{t}\sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{t}y + \frac{1}{2}$ $\qquad x, y \overset{>}{\neq} 0$

<u>Homogene Gleichung:</u>

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y \iff \int \frac{dy}{y} = 2\int\frac{dt}{t} + c$$

$$\iff \ln|y| = 2\ln|t| + c$$

$$\Rightarrow y_h = t^2 \cdot c$$

<u>Variation d. Koeff:</u>

$$y_p = t^2 \cdot c(t)$$

$$\Rightarrow \dot y_p = \cancel{2t c(t)} + t\dot c(t) = \cancel{\frac{2}{t}t^2 c(t)} + \frac{1}{2}$$

$$\iff \dot c(t) = \frac{1}{2t^2} \Rightarrow c(t) = -\frac{1}{2t}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{t}{2}$$

Gesamtlösung: $y = t^2 \cdot c - \frac{t}{2}$ $\qquad t^2 \cdot c - \frac{t}{2} > 0$

$\Rightarrow x = y^2 = \left(t^2 \cdot c - \frac{t}{2}\right)^2$ $\qquad$ —— " ——

Es gilt $t^2c - \frac{t}{2} = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{1}{2c}$ $(c \neq 0)$, daher ist obige Lösungsfkt. definiert für $t \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2c}, \infty)$ bei $c > 0$ bzw. für $t \in (-\infty, \frac{1}{2c}) \cup (0, \infty)$ bei $c < 0$.

$c = 0$ liefert $y = -\frac{t}{2}$ auf $(-\infty, 0)$

Weitere Ausnahmen:

·) $y = 0 \iff x = 0$ ist Lösung auf $\mathbb{R}$.

·) $t_0 = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow$ Lösung: $x = 0$.

<u>1. AWP:</u> $x(1) = 0 \Rightarrow y(1) = 0$

$0 = y(1) = 1^2 \cdot c - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

mögliche Lösungen:

·) $x = \frac{t^2}{4}(t-1)^2$ auf $(1, \infty)$

·) $x = 0$ auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ max. Intervall-Lösungen:

·) $x = 0$

·) $x = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 1] \\ \frac{t^2}{4}(t-1)^2 & t \in (1, \infty) \end{cases}$

Die Differenzierbarkeit von $t=1$ ist gegeben:

$$x'(1)^+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{x(1+h) - x(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{(1+h)^2}{4} h^2}{h} = 0$$

$$x'(1)^- = \dots = 0$$

2. AWP: $x(1) = 3 \Rightarrow y(1) = \sqrt{3}$

$y(1) = \sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$

max. Intervall-Lösungen:

$$x = \begin{cases} 0 & t \in \left(-\infty, \frac{1}{2\sqrt{3}+1}\right) \\ \left((\sqrt{3} + \frac{1}{2}) t^2 - \frac{t}{2}\right)^2 & t \in \left(\frac{1}{2\sqrt{3}+1}, \infty\right) \end{cases}$$

(analog zu oben)

79) $t^3 \dot{x} = x^2 + t^4$

Polynomlösung:

Sei $x = a t^n + p$ mit $n \in \mathbb{N}$, $[p] < n$, $a \neq 0$.

Einsetzen: $\underbrace{t^3 (n a t^{n-1} + \dot{p})}_{n a t^{n+2} + t^3 \underbrace{\dot{p}}_{[\dot{p}] < n-1}} = a^2 t^{2n} + 2 a t^n p + p^2 + t^4$

$a \neq 0$, also muss höchster Grad links dem höchsten Grad rechts entsprechen, dh. $n a t^{n+2} = a^2 t^{2n} \Rightarrow t^{n+2} = t^{2n} \Rightarrow n = 1$.

$\Rightarrow 2 a t^2 = a^2 t^2 \Leftrightarrow a = 1$ ($a = 0$ ausgeschl.)

$\Rightarrow x = t^2 + p$ mit $[p] < 2$, also $x = t^2 + bt + c$

Einsetzen: $2t^2 + t^3 b = 2t^2 + 2t^2(bt + c) + (bt + c)^2 + t^4$

$\Leftrightarrow t^3 b = 2b t^3 + 2t^2 c + b^2 t^2 + 2btc + c^2 + t^4 \quad \forall t \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow -t^3 b = b^2 t^2 + t^4 \Leftrightarrow t^2 + tb + b^2 = 0 \quad \forall t \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow$ Polynomlösung: $x = t^2$

Allgemeine Lösung:

$$t^3 \dot{x} = x^2 + t^4 \iff \dot{x} = \frac{1}{t^3} x^2 + t \qquad t \neq 0$$

Riccati-DGL $\Rightarrow x = t^2 + y$

$$\dot{y} = \frac{2}{t} y + \frac{1}{t^3} y^2 \qquad \text{(Bernoulli)}$$

Substitution: $z = \frac{1}{y}$ $\qquad y \neq 0$

$$\Rightarrow \dot{z} = -\frac{1}{y^2}\dot{y} = -\frac{2}{ty} - \frac{1}{t^3} = -\frac{2}{t} z - \frac{1}{t^3}$$

Homogene Gleichung:

$$\dot{z} = -\frac{2}{t} z \iff \int \frac{dz}{z} = -2 \int \frac{dt}{t} + c \qquad z \neq 0$$

$$\iff \ln|z| = -2\ln|t| + c$$

$$\Rightarrow z_h = \frac{c}{t^2} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Variation d. Koeff.:

$$z_p = \frac{1}{t^2} c(t)$$

$$\Rightarrow \dot{z}_p = \cancel{-\frac{2}{t^3} c(t)} + \frac{1}{t^2}\dot{c}(t) = \cancel{-\frac{2}{t}\left(\frac{1}{t^2} c(t)\right)} - \frac{1}{t^3}$$

$$\iff \dot{c}(t) = -\frac{1}{t} \Rightarrow c(t) = -\ln|t|$$

Gesamtlösung:

$$z = \frac{c}{t^2} - \frac{\ln|t|}{t^2} \qquad c \in \mathbb{R} \text{ (}z=0\text{ ist keine Lösung.)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{z} = \frac{t^2}{c - \ln|t|} \qquad c \neq \ln|t_0|, \quad t \neq 0 \wedge c - \ln|t| \neq 0 \iff |t| \neq e^c$$

sowie $y = 0$.

an 0 diffbar fortsetzbar!

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t^2 + \dfrac{t^2}{c - \ln|t|} & c \neq \ln|t_0|,\ t \in (-\infty, -e^c) \cup (-e^c, 0) \cup (0, e^c) \cup (e^c, \infty) \\ x = t^2 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

83) $x = \ln|y'|$ $\qquad y' \neq 0$

<u>Parametrisierung:</u>

$y' = p,\ x = x(p),\ y = y(p)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(p) = \ln|p| \\ \dot y(p) = p\,\dot x(p) \end{cases} \qquad p \neq 0$$

Lösung:

$$x(p) = \ln|p|$$

$$y(p) = \int p\,\dot x(p)\,dp = \int dp + c = p + c$$

Soll gelten: $(x,y)(p_0) = (1,0)$ für ein $p_0 \neq 0$.

$$x(p_0) = \ln|p_0| = 1 \quad \text{für } p_0 = \pm e$$

$$y(p_0) = y(\pm e) = \pm e + c = 0 \Leftrightarrow c = \mp e$$

$\Rightarrow$ Gleichungen der Lösungskurven:

$$\begin{cases} x = \ln p \\ y = p - e \end{cases} \quad p_0 > 0 \qquad \begin{cases} x = \ln(-p) \\ y = p + e \end{cases} \quad p_0 < 0$$

87) $y = xy' - \sin y'$ $\quad$ (<u>Clairaut</u>)

Lösungsgerade: $y = cx - \sin c$ $\qquad (c \in \mathbb{R})$

$y' = p$:

$$\Rightarrow \begin{cases} y(p) = p\,x(p) - \sin p \\ \dot y(p) = p\,\dot x(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot y(p) = x(p) + \cancel{p\,\dot x(p)} - \cos p = \cancel{p\,\dot x(p)}$$

$$\Leftrightarrow x(p) = \cos p \Rightarrow y(p) = p\cos p - \sin p \qquad p \in \mathbb{R}.$$

91) $y = xy'^2 + y'^3$ (d'Alembert)

$y' = p$:

$$\begin{cases} y(p) = x(p)\,p^2 + p^3 \\ \dot y(p) = p\,\dot x(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot y(p) = p\,\dot x(p) = \dot x(p)\,p^2 + 2p\,x(p) + 3p^2$$

$$\Leftrightarrow (p - p^2)\,\dot x(p) = 2p\,x(p) + 3p^2 \qquad p \neq 0,\ p \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \dot x(p) = \frac{2}{1-p}\,x(p) + \frac{3p}{1-p} \qquad p \neq 1$$

Homogene Gleichung:

$$\dot x(p) = \frac{2}{1-p}\,x(p) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = 2\int \frac{dp}{1-p} + c \qquad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| = -2\ln|1-p| + c$$

$$\Rightarrow x_h = \frac{c}{(1-p)^2} \qquad \cancel{(c \in \mathbb{R})}$$

Variation d. Koeff.:

$$x_p = \left(\frac{1}{1-p}\right)^2 \cdot c(p)$$

$$\Rightarrow \dot x_p = \cancel{\frac{2}{1-p} \cdot \frac{1}{(1-p)^2} \cdot c(p)} + \left(\frac{1}{1-p}\right)^2 \dot c(p) = \cancel{\frac{2}{1-p}\left(\frac{1}{1-p}\right)^2 \cdot c(p)} + \frac{3p}{1-p}$$

$$\Leftrightarrow \dot c(p) = 3p(1-p)$$

$$\Rightarrow c(p) = \frac{3}{2}p^2 - p^3$$

$$\Rightarrow x_p = \left(\frac{1}{1-p}\right)^2 \cdot p^2\left(\frac{3}{2} - p\right)$$

$\Rightarrow$ Gesamtlösung: $x = \left(\frac{1}{1-p}\right)^2 c + \left(\frac{1}{1-p}\right)^2 p^2\left(\frac{3}{2} - p\right) = \frac{c + \left(\frac{3}{2} - p\right)p^2}{(1-p)^2}$ $(c \in \mathbb{R}$, $p \neq 1)$

$$y = xp^2 + p^3 = \frac{c + \left(\frac{3}{2} - p\right)p^2}{(1-p)^2}\,p^2 + p^3 = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2\left(c - \frac{1}{2}p^2 + p\right) \qquad p \neq 1$$

Ausnahmen:

- $x = 0 \Rightarrow \dot x(p) = 0 \Rightarrow \dot y(p) = 0 \ \wedge\ y(p) = p^3 \Leftrightarrow \dot y(p) = 3p^2$ ↯

  also: $x = 0 \Rightarrow y = 0$.

- $p = 1 \Leftrightarrow y' = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$

- $p = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ ist Lösung.

67) $\dot{x} = \dfrac{2t + x - 4}{t + 3x + 3}$ $\qquad t + 3x + 3 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

also Substitution $t = u + p$, $x = v + q$, wobei p, q so gewählt werden, dass die Konstanten wegfallen.

$$\left.\begin{aligned} 2p + q &= 4 \\ p + 3q &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -5q = 10 \Leftrightarrow q = -2 \Rightarrow p = 3.$$

$$\Rightarrow \dot{v}(u) = \dot{x}(t) = \frac{2u + v}{u + 3v} = \frac{2 + \frac{v}{u}}{1 + 3\frac{v}{u}} \qquad u \neq 0,\ 1 + 3\tfrac{v}{u} \neq 0$$

Substitution: $y = \frac{v}{u} \Leftrightarrow v = uy$

$$\Rightarrow \dot{v}(u) = y + u\dot{y}(u) = \frac{2 + y}{1 + 3y}$$

$$\Leftrightarrow \dot{y}(u) = \frac{1}{u}\left(\frac{2 + y}{1 + 3y} - y\right) = \frac{1}{u}\,\frac{2 - 3y^2}{1 + 3y} \qquad 1 + 3y \neq 0$$

$$\left(1 + 3y \neq 0 \Leftrightarrow 1 + 3\frac{v}{u} = 1 + 3\frac{x - q}{t - p} = 1 + 3\frac{x + 2}{t - 3} = t + 3x + 3 \neq 0\right)$$

Trennung d. Variablen:

$$\dot{y}(u) = \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\,\frac{2 - 3y^2}{1 + 3y} \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{1 + 3y}{2 - 3y^2}\,dy + c \qquad 2 - 3y^2 \neq 0 \Leftrightarrow |y| \neq \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$\int \frac{1 + 3y}{2 - 3y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1 + 3y}{1 - \frac{3}{2}y^2}\,dy = \left| \begin{aligned} z &= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,y \\ dz &= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,dy \end{aligned} \right| \quad y = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{1 + \sqrt{6}z}{1 - z^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{6}}\underbrace{\int \frac{dz}{1 - z^2}}_{\substack{\operatorname{artanh} z \quad |z| < 1 \\ \operatorname{arcoth} z \quad |z| > 1}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{-2z}{1 - z^2}\,dz}_{\ln|1 - z^2|}$$

1. Fall: $|z| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\sqrt{3}v}{\sqrt{2}u}\right| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{3}|v| < \sqrt{2}|u|$

$$\Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{3}v}{\sqrt{2}u}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\cancel{3}1 - \frac{3v^2}{2u^2}\right) + c - \cancel{2}\ln|u|$$

g ist definiert für $\sqrt{3}|v| \neq \sqrt{2}|u|$ $(\Leftrightarrow |y| \neq \sqrt{\tfrac{2}{3}})$, $|u| \neq 0$

und dort stetig diffbar.

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{1 - \frac{3v^2}{2u^2}} \cdot \frac{\sqrt{6}u}{2u^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{3v^2}{2u^2}} \cdot \frac{-12vu^2}{4u^4} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u + 3v \neq 0$$

2. Fall: $|z| > 1$

$$\Rightarrow g(u,v) = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arcoth}\left(\frac{\sqrt{3}\,v}{\sqrt{2}\,u}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3v^2}{2u^2} - 1\right) + c - 2 \ln|u|$$

liefert dasselbe.

Also:

$$h(x,t) = g(\underbrace{\cancel{v-3}}_{}\overset{x+2}{}, \overset{t-3}{\cancel{u+3}}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left| \frac{1 + \frac{\sqrt{3}(x+2)}{\sqrt{2}(t-3)}}{1 - \frac{\sqrt{3}(x+2)}{\sqrt{2}(t-3)}} \right| - \ln\left| 1 - \frac{3(x+2)^2}{2(t-3)^2} \right| + c = 2 \overset{\ln|t-3|}{\cancel{\text{konst}}}$$

ist an allen Stellen (x,t) mit $\sqrt{3}|x+2| \neq \sqrt{2}|t-3|$, $|t-3| \neq 0$, $t+3x+3 \neq 0$ ~~lokal~~ nach dem HS über implizit definierte Funktionen nach t auflösbar (~~Auflösung~~: $x(t)$) und genügt dort der zu lösenden DGL:

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial v}} = -\frac{\frac{2u+v}{3v^2-2u^2}}{-\frac{u+3v}{2u^2-3v^2}} = \frac{2u+v}{u+3v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{2t+x-4}{t+3x+3}.$$

Ausnahmestellen:

•) $t_0 - 3 = 0$: $\Leftrightarrow t_0 = 3$ $\quad \Rightarrow \dot{x} = \frac{2(t_0-3)+x+2}{t_0-3+3x+6} = \frac{x+2}{3(x+2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{t}{3} + c$

•) $\frac{x+2}{t-3} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$: $\Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\, t + c$