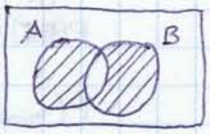
19.3.09

Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Statistik UE

I, 1, ZZ: $A \triangle B = A^c \triangle B^c$



$$A \triangle B \underset{\text{Def.}}{=} (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

$$\underset{\text{Komm.}}{=} (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$= A^c \triangle B^c$$

2, $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} \mid P(A) \in \{0,1\}\}$, ZZ: $\mathcal{M}$ ist σ-Algebra

a, $\Omega \in \mathcal{M}$, da $P(\Omega) = 1$

b, $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$

$P(E) = 0 \Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E) = 1$
$P(E) = 1$ analog

c, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \exists E_i \text{ mit } P(E_i) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3) Einsetzen in den Inklusions-Exklusionssatz:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

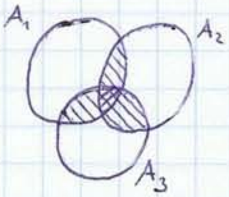
Bew. mittels Additionssatz für 2 Ereignisse:

$$P(\underbrace{A_1 \cup A_2}_{=:B} \cup A_3) = P(B) + P(A_3) - P(B \cap A_3)$$

$$= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P(\underbrace{(A_1 \cup A_2) \cap A_3}_{(\underbrace{A_1 \cap A_3}_{=:C}) \cup (\underbrace{A_2 \cap A_3}_{=:D})})$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - \left(P(C) + P(D) - P(C \cap D)\right)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(\underbrace{(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)}_{= A_1 \cap A_2 \cap A_3})$$



4) a) $P(6) = \frac{1}{6}$

$P(\text{mind. } 1 \times 6) = 1 - P(\text{keine } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177\ldots \approx 0{,}52$

$P(DS) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

$P(\text{mind. } 1\,DS) = 1 - P(\text{keine } DS) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914\ldots \approx 0{,}49$

b) $P(\text{mind. } 1\,DS) > P(\text{keine } DS)$

$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \left(\frac{35}{36}\right)^n \quad | \cdot 36^n$

$\Leftrightarrow 36^n - 35^n > 35^n$

$\Leftrightarrow n \ln 36 > \ln 2 + n \ln 35$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} = 24{,}605\ldots \approx \cancel{25} \Rightarrow n \geq 25$

5) $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ o. } A^c \text{ endlich}\}$

a) $\Omega = \mathbb{N} \in \mathcal{A}$, da $\mathbb{N}^c = \emptyset$ endlich

b) ok. VS

c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$?

Gegenbsp.: $A_i := \{2i\} \in \mathcal{A} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

aber $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ (= Menge der ger. Zahlen) $\notin \mathcal{A}$, da nicht endlich und Komplement (= Menge der unger. Zahlen) ebenfalls nicht

$\Rightarrow \mathcal{A}$ ist keine σ-Algebra.

d) $A \cup B \in \mathcal{A}$?

$A \cup B$ ist $\begin{cases} \text{endlich} \Leftrightarrow A, B \text{ endlich} \\ \text{unendlich sonst, aber Komplement endlich} \end{cases} \Rightarrow \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ ist Algebra.

6) Berechnung über die Gegenwahrscheinlichkeit, also 1 - P(mind. 1 Ehepaar tanzt miteinander)

Man nummeriere zunächst die Paare durch und halte die Männer fest,

jede Auslosung entspricht dann einer Permutation σ der Frauen-Nummern.

Es gibt also insgesamt $n!$ verschiedene Auslosungen.

Wir bezeichnen das Ereignis $\sigma(i) = i$, also dass das i-te Paar zusammen=gelost wird, mit A_i.

Wurden k Paare ausgelost, gibt es nur noch $(n-k)!$ Möglichkeiten, den verbliebenen Männern die Frauen zuzulosen. Die Wahrscheinlichkeit, dass k Männer mit ihren Ehefrauen tanzen, ist also

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$

Insgesamt gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Paare auszuwählen.

Add.-Theorem

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\cancel{n!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

7) 5 Möglichkeiten existieren, den Test zu bestehen:

1. $\oplus \oplus \oplus \oplus$ ... WS: p^4
2. $- \oplus \oplus \oplus$ ... WS: $(1-p)\frac{p}{2} p^2 = \frac{p^3}{2} - \cancel{p^3}\,\frac{p^4}{2}$
3. $\oplus - \oplus \oplus$ ... WS: —"—
4. $\oplus \oplus - \oplus$ ... WS: —"—
5. $\oplus \oplus \oplus \ominus$ ... WS: $p^3(1-p) = p^3 - p^4$

$\Rightarrow$ gesamt: $p^4 + p^3 - p^4 + 3\left(\frac{p^3}{2} - \frac{p^4}{2}\right) = \frac{5p^3 - 3p^4}{2}$