11.3.09

# Lin. Algebra UE

I) 8.1: 1, 7
8.2: 1$\beta\gamma\varepsilon$, 9
8.3: 2
8.4: 1$\alpha\gamma$, 6
8.5: 1

8.1.1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$
$x \mapsto \mathrm{diag}(x,x)$ ~~[illegible]~~ Körperiso

a) gesucht: $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $I^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^{I}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+bc = -1 \\ d^2+bc = -1 \end{array}\right. \Rightarrow a^2 = d^2$$

$$\left.\begin{array}{l} ab+bd = b(a+d) = 0 \\ ca+dc = c(a+d) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\text{nicht möglich! } (a^2=-1)}{b \wedge c = 0} \vee \underline{a+d=0}$$

setze $a = d = 0$

$$\Rightarrow I^2 = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \iff bc = -1, \text{ also zB } b=-1, c=1: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) ~~Anm~~ Beh: Man identifiziert die Nebendiagonale einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ als Imaginärteil einer Zahl $a+bi \in \mathbb{C}$.
Dann ist $L = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \text{erfüllen obige Form}\}$ die gesuchte Menge.

Der zugehörige Isomorphismus ist $\varphi: L \to \mathbb{C}: \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a+bi$

Bew.: ~~$\varphi(0)$~~

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}\right) = (a+c)+(b+d)i \quad ✓$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix}\right) = (ac-bd)+(ad+bc)i \quad ✓$$

8.2.1. β) $X^3-2 \in \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$

$$X^3-2=0$$
$$\Leftrightarrow \quad X=\sqrt[3]{2}=\lambda_1$$

$$X^3-2 = X^3-(\sqrt[3]{2})^3 = (X-\sqrt[3]{2})(X^2+\sqrt[3]{2}X+(\sqrt[3]{2})^2)$$

$$X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{2^2}=0 \Leftrightarrow X_{1,2} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt[3]{2^2}}{4}-\sqrt[3]{2^2}}$$
$$= -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{4}}$$
$$= -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}}{2} i = \{\lambda_2, \lambda_3\}$$

Nullstellen: $\nexists \in \mathbb{Q}$
$\lambda_1 \in \mathbb{R}$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ $\Big\}$ jew. einfach

γ) $(X^4-X)^2 \in GF(4)[X]$

$$(X^4-X)^2=0$$
$$\Leftrightarrow X^4-X=0$$
$$\Leftrightarrow X(X^3-1)=0$$
$$\Leftrightarrow X(X-1)(X^2+X+1)=0$$

$$\underbrace{\lambda_1=0 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=a \quad \lambda_4=b}_{\text{jew. doppelt}}$$

ε) $X^3+X^2+X+1=0 \qquad (X^k=X \quad \forall k\in\mathbb{N})$
$$\Leftrightarrow 3X+1=0$$
$$\Leftrightarrow 3X=1$$
$$\Leftrightarrow X=1 \quad \text{dreifache NS}$$

8.3.2) a) $(g\circ h)(a) = \lambda\cdot a \qquad (a\in V)$
$$\Leftrightarrow (h\circ g\circ h)(a) = h(\lambda\cdot a)$$
$$\Leftrightarrow (h\circ g)(h(a)) = \lambda\cdot h(a)$$

b) $\dim V = n < \infty$

$0$ EW v. $g\circ h \Leftrightarrow \ker(g\circ h - 0\cdot id_V) \neq o$
$\Leftrightarrow \ker(g\circ h) \neq o$
$\Leftrightarrow g\circ h$ nicht inj. $\Leftrightarrow g\circ h$ nicht surj.
$\Leftrightarrow g$ oder $h$ nicht surj.
$\Leftrightarrow h\circ g$ nicht surj. $\Leftrightarrow h\circ g$ nicht inj.
$\Leftrightarrow \ker(h\circ g) \neq o$
$\Leftrightarrow 0$ ist EW von $h\circ g$

8.4.1) α)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

$$\chi_A(X)=\det(A-XE_n)=\begin{vmatrix}-X&1&0&0\\0&-X&1&0\\0&0&-X&1\\\boxed{1\quad 0\quad 0\quad -X}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&0\\-X&1&0\\0&-X&1\end{vmatrix}}_{1}-X\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}-X&1&0\\0&-X&1\\0&0&-X\end{vmatrix}}_{(-X)^3}$$

$$=-1+X^4=(X^2+1)(X+1)(X-1)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\lambda_1=-1\\\lambda_2=1\end{matrix}\right\}\text{ Eigenwerte (alg. VF: 1)}$$

$\underline{ER(-1):}$ $\ker(A-(-1)E_n)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}x_1&x_2&x_3&x_4&\\\hline +1&1&0&0&\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&\\1&0&0&1&\end{array}\right)\Rightarrow \text{Basis von } ER(-1):\begin{pmatrix}+1\\-1\\+1\\-1\end{pmatrix}$$

$\underline{ER(1):}$ $\ker(A-1E_n)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}x_1&x_2&x_3&x_4&\\\hline -1&1&0&0&\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&\\1&0&0&-1&\end{array}\right)\Rightarrow \text{Basis von } ER(1):\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

β) $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$ mit $\varphi\in\mathbb{R}$

$$\chi_A(X)=\det(A-XE_n)=\begin{vmatrix}\cos\varphi-X&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi-X\end{vmatrix}$$

$$=(\cos\varphi-X)^2+\sin^2\varphi=\cos^2\varphi-2\cos\varphi X+X^2+\sin^2\varphi$$

$$=X^2-2\cos\varphi X+1=0$$

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$
$\Leftrightarrow \cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$

$$\Leftrightarrow X_{1,2}=\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1}$$

$$=\cos\varphi\pm\sqrt{-\sin^2\varphi}=\cos\varphi\pm\sin\varphi\, i$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_1=\cos\varphi+\sin\varphi\, i=e^{i\varphi}\\\lambda_2=\cos\varphi-\sin\varphi\, i=e^{-i\varphi}\end{matrix}\right\}\text{ je alg. VF: 1}$$

$ER(e^{i\varphi})$:

| $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|
| $-\sin\varphi\, i$ | $-\sin\varphi$ | 0 |
| $\sin\varphi$ | $-\sin\varphi\, i$ | |
| $-i$ | $-1$ | 0 |
| $1$ | $-i$ | |

$\Rightarrow$ Basis von $ER(e^{i\varphi})$: $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$ER(e^{-i\varphi})$:

| $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|
| $\sin\varphi\, i$ | $-\sin\varphi$ | 0 |
| $\sin\varphi$ | $\sin\varphi\, i$ | |
| $i$ | $-1$ | 0 |
| $1$ | $i$ | |

$\Rightarrow$ Basis von $ER(e^{-i\varphi})$: $\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$

Spezialfall: $\varphi = \mathbb{Z}\pi \Rightarrow \cos\varphi = \pm 1,\ \sin\varphi = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(x) = (\pm 1 - x)^2 \quad \Rightarrow \pm 1$ ist doppelte NS

$ER(\pm 1)$:

| $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | |

$\Rightarrow$ Basis von $ER(\pm 1)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ geo. VF=2

8.5.1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A \approx B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 \\ -2 & 1-x \end{vmatrix} = (4-x)(1-x) + 2 = \underline{6 - 5x + x^2}$$

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -3 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x)(2-x) = \underline{6 - 5x + x^2}$$

$\Rightarrow A \approx B$

$$\overset{B\approx C}{C} = Q^{-1}BQ \Leftrightarrow B = QCQ^{-1} \Leftrightarrow \overset{A\approx C}{B} = QR^{-1}A\underbrace{RQ^{-1}}_{=:P} \Leftrightarrow B = P^{-1}AP$$

$\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$

$C = Q^{-1} B Q$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\left( b_1 \middle| b_2 \right)}_{Q}$$

$ER(3)$: $\ker(B - 3E_n)$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & \end{array} \quad \Rightarrow b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ER(2)$: $\ker(B - 2E_n)$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \end{array} \quad \Rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C = R^{-1} A R$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\left( a_1 \middle| a_2 \right)}_{R}$$

$ER(3)$:

$$\cancel{\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \end{array} \quad \Rightarrow a_1 =} \quad \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & \end{array} \quad \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$ER(2)$:

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & \end{array} \quad \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = R Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8.4.6, a)

1. Fall: $n=2k$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \cancel{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum 1.\text{Zeile} \\ 0 \\ \sum 3.\text{Zeile} \\ \vdots \\ \sum n\text{-}1.\text{Zeile} \\ 0 \\ \cancel{\sum n.\text{Zeile}} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$=: a_1 \quad =: a_2$

analog $A \cdot a_2 = k \cdot a_2$

2. Fall: $n=2k+1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (k+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aber $A \cdot a_2 = k \cdot a_2$

---

$\operatorname{rg} A = 2 \quad \forall n \geq 2 \quad \Rightarrow \dim \ker A = n-2 \quad \forall n \geq 2$

---

$\dim \ker A = \dim \ker(A - 0E_n) = n-2$

$\Leftrightarrow$ geo. VF von $0 = n-2$

$\Rightarrow \underset{\max}{\exists} 2 \text{ EW} \neq 0$ (s.o.)

$$\Rightarrow \chi_A(X) = \begin{cases} X^{n-2}(X-k)^2 & n=2k \\ X^{n-2}(X-k)(X-(k+1)) & n=2k+1 \end{cases}$$

b) $A=(a_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}$ (Spalten$\sum = 1$)

$A' := A - E_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} = 0 \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}$ (Spalten$\sum = 0$)

$1 = \text{EW} \Leftrightarrow \chi_A(1) = \det(A - E_n) = \det A' = 0$

betrachte Aufbau von $A'$:

$$\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n-1,1} & a'_{n-1,2} & \dots & a'_{n-1,n} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} a'_{i1} & -\sum_{i=1}^{n-1} a'_{i2} & \dots & -\sum_{i=1}^{n-1} a'_{in} \end{array}$$

$\Rightarrow$ letzte Zeile ist LK der ersten $n-1$ Zeilen, also $\operatorname{rg} A < n \Rightarrow \det A' = 0$

$\Rightarrow 1$ ist EW von $A$.

8.1.7) a) $K^I$ bildet K-Algebra, komm., assoz., Einselement

I) $(a_i)\cdot((b_j)+(c_k)) = (a_i)((b_j+c_j)) = (a_i(b_i+c_i)) = (a_ib_i + a_ic_i) = (a_ib_i)+(a_ic_i)$

II) $((a_i)+(b_j))\cdot(c_k) = ((a_i+b_i))(c_k) = ((a_i+b_i)c_k) = (a_ic_i + b_ic_i) = (a_ic_i)+(b_ic_i)$

III) $x((a_i)(b_j)) = x(a_ib_i) = (x(a_ib_i)) = ((xa_i)b_i) = (xa_i)(b_j)$

$= (a_i(xb_i)) = (a_i)(xb_j)$

IV) assoz.?
$((a_i)\cdot(b_j))\cdot(c_k) = (a_ib_i)(c_k) = ((a_ib_i)c_i) = (a_i(b_ic_i)) = (a_i)(b_jc_j)$

$= (a_i)((b_j)(c_k))$

V) komm.?
$(a_i)(b_j) = (a_ib_i) = (b_ia_i) = (b_j)(a_i)$

VI) Einselement

$(a_i)(e_j) = (a_ie_i) = (a_i) \Leftrightarrow (e_j)$... Einselement (mit $e_j = 1\ \forall j \in I$)

b) $K^{\langle I\rangle}$... Menge der Funktionen $f: I \to K$ mit $f(I)=0$ für fast alle $\in I$

analog zu oben; durch Rechenoperationen verlässt man den Raum nicht; da nur Komponenten mit gleichem Index angesprochen werden bleiben unendliche viele Einträge $=0$.

Einselement: $\dim I = n < \infty \Rightarrow$ jeder Vektor hat n Einträge, also auch das Einselement.

$\dim I = \infty \Rightarrow$ Einselement müsste ident zu $K^I$ sein (da unendl. viele Einträge), aber $(1) \notin K^{\langle I\rangle}$ (da unendl. 1-Folge)

c) •) allgemein bereits gezeigt $\Rightarrow$ speziell: 1-Element v. $K^2 =: e = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

•) siehe vorher: U abgeschl. und isomorph zu K (K-Algebra, assoz., komm)

mit 1-Element: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

8.2.9 a) Beweise: $D: K[X] \to K[X]: P(X) \mapsto P'(X)$ ist Derivation,

es gilt also $D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$

$$a = \sum_{i \in I} a_i X^i \Rightarrow D(a) = \sum_{i \in I} (i+1) a_{i+1} X^i$$

$$b = \dots\dots \Rightarrow D(b) = \dots\dots\dots$$

$$a \cdot b = \sum_{i \in I} \underbrace{\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}}_{=: c_i} X^i \Rightarrow D(a \cdot b) = \sum_{i \in I} (i+1) \underbrace{\sum_{j=0}^{i+1} a_j b_{i+1-j}}_{c_{i+1}} X^i$$

$$D(a) \cdot b + a \cdot D(b) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \cancel{\sum_{j=0}} (i+1) a_{i+1} X^i \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X_i + \sum_{i \in I} a_i X^i \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} (i+1) b_{i+1} X^i$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=0}^{i} (j+1) a_{j+1} b_{i-j} + \sum_{j=0}^{i} (i+1-j) \underline{a_j b_{i+1-j}} \right) X^i$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=1}^{i+1} j \, \underline{a_j b_{i+1-j}} + \text{——}\,"\,\text{——} \right) X^i$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\cancel{j} + i + 1 - \cancel{j}) \left( \sum_{j=1}^{i} a_j b_{i+1-j} + \underbrace{(i+1)(a_0 b_{n+1})}_{0.\ Gl.} + \underbrace{(i+1) a_{i+1} b_0}_{(i+1).\ Gl.} \right) X^i$$

$$= \sum_{i \in I} (i+1) \sum_{j=0}^{i+1} a_j b_{i+1-j} X^i = D(a \cdot b)$$

b) Jede $k$-fache NS von $P(X)$ ist $(k-1)$-fache NS von $P'(X)$

$$P(X) = (X-4)^k \cdot S(X)$$

$$P'(X) = ((X-4)^k \cdot S(X))'$$

$$= k (X-4)^{k-1} \cdot S(X) + (X-4)^k \cdot S'(X)$$

$$= (X-4)^{k-1} (k \cdot S(X) + (X-4) S'(X))$$

$\Rightarrow 4$ ist $(k-1)$-fache NS