16.11.09

Maß- u. Wahrscheinlichkeitstheorie UE

VI,

1) $(\Omega, \mathcal{T})$, $|\Omega| > \aleph_0$, $\mathcal{T} := \{A \subseteq \Omega \mid |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$

ZZ: $f: (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{L}) \Leftrightarrow \exists A \subseteq \Omega: |A| \leq \aleph_0 \wedge f(\omega) = \cancel{const}$ $\forall \omega \in A^c$.

„$\Leftarrow$" Sei $B \in \mathcal{L}$, so gilt $c \notin B \Rightarrow f^{-1}(B) \cap A^c = \emptyset$.

Daher gilt $f^{-1}(B) \subseteq A \Rightarrow |f^{-1}(B)| \leq |f^{-1}(A)| \leq \aleph_0 \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Für $c \notin B$ gilt $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \setminus \{c\}) \cup f^{-1}(c)$.

Wegen $A^c \subseteq f^{-1}(c)$ ist $(f^{-1}(c))^c \subseteq A \Rightarrow |(f^{-1}(c))^c| \leq \aleph_0 \Rightarrow f^{-1}(c) \in \mathcal{T}$

und somit $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

f ist also $\mathcal{T}|\mathcal{L}$-messbar.

„$\Rightarrow$" f ist messbar, d.h. $\forall c \in \mathbb{R}$ gilt entweder:

1) $|f^{-1}(c)| \leq \aleph_0$, d.h. $\exists$ höchstens abz. viele Pkte mit $f(\omega) = c$ oder

2) $|(f^{-1}(c))^c| \leq \aleph_0$, d.h. $\exists$ höchst. abz. viele Pkte mit $f(\omega) \neq c$.

<u>Annahme:</u> $\exists$ ausschließlich Punkte, die 1. erfüllen.

Wegen $|\Omega| > \aleph_0$ muss dann $f(\Omega)$ aus überabzählbar vielen (verschiedenen) Punkten bestehen. Es ist daher möglich, Mengen $M_1, M_2 \subseteq f(\Omega)$ derart zu wählen, dass gilt: $M_i \subseteq C_i$ $i \in \{1,2\}$; $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$ sowie $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Es gilt $|C_1| > \aleph_0 \Rightarrow |f^{-1}(C_1)| > \aleph_0$ und auch

$C_1^c \supseteq C_2 \Rightarrow |f^{-1}(C_1)^c| = |f^{-1}(C_1^c)| \geq |f^{-1}(C_2)| > \aleph_0$.

Das heißt aber $f^{-1}(C) \notin \mathcal{T}$, somit ist f nicht messbar! ↯

Also: Es muss ein ~~$\omega \in \Omega$~~ $c \in \mathbb{R}$ geben, ~~sodass~~ das 2. erfüllt. ~~⊠~~

2) ZZ: $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ hat höchst. abz. viele Unstetigkeitsstellen $\Rightarrow$ f ist messbar.

Seien $a_1, a_2, \dots$ die Unstetigkeitsstellen von f.

Dann existiert eine Zerlegung von $\mathbb{R}^k$ durch (höchstens abz. viele) zusammenhängende Mengen I_j, sodass $\mathbb{R}^k = \bigcup_j I_j$ und $f|_{I_j}$ stetig ist $\forall j$.

$\Rightarrow f|_{I_j}$ ist $\mathcal{L}_k$-messbar $\forall j$.

Wegen $f^{-1}((-\infty, c)) = \bigcup_j f|_{I_j}^{-1}((-\infty,c)) \in \mathcal{L}_k \quad \forall c \in \mathbb{R}$ ist f $\mathcal{L}_k|\mathcal{L}$-messbar.

3) ZZ: Unstetigkeitsstellen von $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ bilden λ_k-Nullmenge $\Rightarrow$ f ist $\mathcal{L}_k|\mathcal{L}$-messbar.

Sei N die Menge der Unstetigkeitsstellen, so ist $f|_{N^c}$ stetig und somit Borel-messbar.

Es gilt $f^{-1}(B) = \underbrace{f|_{N^c}^{-1}(B)}_{\in \mathcal{L}} \cup \underbrace{f|_N^{-1}(B)}_{\in \mathcal{N}} \quad \forall B \in \mathcal{L}$.

$f|_N^{-1}(B) \subseteq N \Rightarrow \lambda_k(f|_N^{-1}(B)) = 0 \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{L}_k$ lt. Konstruktion von $\mathcal{L}_k$.

5) $(\Omega, \mathcal{A})$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$

a) $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \exists A \subseteq \Omega$ mit $A \notin \mathcal{A}$.

Sei $f_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ -1 & \omega \notin A \end{cases}$

Wähle $A \notin \mathcal{A} \Rightarrow f_A^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathcal{A} \Rightarrow f_A$ ist nicht $\mathcal{A}|\mathcal{L}_1$-messbar.

$|f_A|(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow |f_A|$ ist $\mathcal{A}|\mathcal{L}_1$-messbar.

b) $g_A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \omega \mapsto \begin{cases} 0 & \omega = 1 \vee \omega = -1 \\ 1 & \omega \in A \setminus \{-1,1\} \\ 2 & \omega \notin A \cup \{-1,1\} \end{cases}$

$g_A \circ f_A(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega, A \subseteq \Omega \Rightarrow g_A \circ f_A$ ist messbar

aber g nicht $\mathcal{L}_1|\mathcal{L}_1$-messbar, da

$A \notin \mathcal{L}_1 \; \cancel{\Rightarrow} \; \{-1,1\} \notin A \Rightarrow g_A^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathcal{L}_1.$ ~~[illegible]~~

7) $S: \{1,\dots,6\}^2 \longrightarrow \{2,\dots,12\}$
$\quad (x_1,x_2) \longmapsto x_1+x_2$

$\sigma_2 = \mathcal{P}(\{2,\dots,12\})$

$\sigma(S) = S^{-1}(\sigma_2)$

Bezeichne $C_i := \{(x_1,x_2) \in \{1,\dots,6\}^2 \mid x_1+x_2 = i\}$ $i \in \{2,\dots,12\}$.

Wegen $C_i \cap C_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ sind die C_i genau die Äquivalenzklassen von $\sigma(S)$.

$S^{-1}(\{i\}) = C_i \quad \forall i \in \{2,\dots,12\}$

$S^{-1}(A) = \bigcup_{i\in A} C_i \qquad \Rightarrow \sigma(S) = \{D \mid D = \bigcup C_i\}$.

4) Sei U_f die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f, so gilt:

$U_f = U_1 \cup U_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid f^-(x) < f(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid f^-(x) > f(x)\}$.

Wir betrachten zunächst U_1:

Sei $g: U_1 \to \mathbb{Q}^2$
$\quad x \mapsto (p,q)$ sodass gilt: $f^-(x) < p < f(x)$
$\quad q < t < x \Rightarrow f(t) < p$

Da nur abzählbar viele solcher Paare existieren, ist nur noch die Injektivität von g zu zeigen. (Bitte selbstständig überlegen.)

Analoges Vorgehen für U_2 mit $h(x) = (p,r)$ wobei $r < t < x \Rightarrow f(t) > p$.

$\Rightarrow |U_f| \leq \aleph_0$.

6) Den Lösungsweg entnehme man Felix Hausdorff: Gesammelte Werke Band II Grundzüge der Mengenlehre, S. 382 f (Kapitel IX, §3. Unstetige Funktionen)

http://books.google.at/books?id=3nth_p-6DpcC