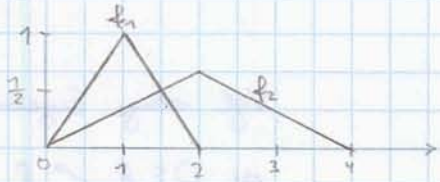
21.12.09

Maß- u. Wahrscheinlichkeitsth. UE

X)

1) $f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2n \\ \frac{1}{n} & x = n \\ \text{linear} & x \in (0,n) \cup (n, 2n) \end{cases}$



$\Rightarrow f_n \to 0$ (glm.)

aber $\int f_n \, d\lambda = 1 \quad \forall n; \quad \int f \, d\lambda = 0.$

2) •) $f_n := \mathbb{1}_{\{q_1, \dots, q_n\}}$

$Q_n := \{q_1, \dots, q_n\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) = 1\}$ ist endlich $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beim R-Int. kommt es auf die Funktionswerte ~~an~~ endlich vielen Stellen nicht an. $\Rightarrow \int_a^b f_n(x)\, dx = 0 \quad \forall [a,b] \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \int_A f_n \, d\lambda = \int_{A \setminus Q_n} f_n \, d\lambda = 0.$

•) $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

Sei $[a,b] \in \mathbb{R}$ und $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ Partition von $[a,b]$, so gilt:

$\sup_P u(P) = \sup_P \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in I_j} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \lambda(I_j) = 0$

$\inf_P O(P) = \inf_P \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in I_j} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \lambda(I_j) = \lambda([a,b]) = b - a$

für $a \neq b$:

$\sup_P u(P) \neq \inf_P O(P) \Rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ über kein einpunktiges Intervall R-intbar.

aber: $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \lambda(\{q_n\}) = 0$

$\Rightarrow \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap A} \, d\lambda \leq \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0$

•) $g := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mathbb{1}_{\{q_i\}} \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} 2^{-i} & x = q_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

g ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, da für ein bel. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ mit $|f(x) - f(y)| = f(y) = f(q_i) = 2^{-i} < \varepsilon \quad \forall y \in \mathbb{Q}$ mit $|x - y| < \delta(\varepsilon)$

wegen $|x - y| > \min_{q_i \in \{q_n \mid 2^{-n} < \varepsilon\}} |x - q_i| =: \delta > 0$.

Menge d. Unstet.-Stellen

Daher gilt $\lambda(D) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$. $\Rightarrow$ g ist R-intbar

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mathbb{1}_{\{q_i\}} \, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\{q_i\}} 2^{-i} \, d\lambda = 0$$

Vgl. obige Ergebnisse mit Satz von Levi bzw. Lebesgue:

a) $0 \le f_n \nearrow f \quad \not\Rightarrow \int f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, dx$

b) $f_n \to f$, g R-intbar mit $|f_n| \le g$ λ-fü

$\not\Rightarrow$ f_n, f R-intbar.

3) $f_k(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nk}(\omega)$ mit $f_{nk}(\omega) := 2^{-n} (\omega - q_n)^2 (1-(\omega-q_n)^2)^{k-1}$

f_{nk} ist stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}$, $f_{nk}(\omega) \le 2^{-n} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ somit $\sum_{n=1}^{\infty} f_{nk}(\omega) \le 1$

und glm. konvergent lt. Majorantenkriterium.

$\Rightarrow$ f_k ist R-intbar.

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nk}(\omega) \overset{f_{nk} \ge 0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(\omega)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\omega - q_n)^2 \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (1-(\omega-q_n)^2)^k}^{= \frac{1}{(\omega-q_n)^2} \text{ für } \omega \ne q_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ mit } a_n := \begin{cases} 0 & \omega = q_n \\ 2^{-n} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mathbb{1}_{\{q_i\}}(\omega) \Rightarrow f$ ist R-intbar (vgl. Bsp. 2)

4) $g_a = f \circ \tau_a$ mit $\tau_a : x \mapsto x + a$

•) ZZ: $f(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{L}) \Leftrightarrow g_a \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{L}) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

„$\Rightarrow$" $f^{-1}(B) \in \mathcal{L} \quad \forall B \in \mathcal{L}'$

$\Rightarrow g_a^{-1}(B) = (f \circ \tau_a)^{-1}(B) = (\tau_a^{-1} \circ f^{-1})(B) = f^{-1}(B) - a \in \mathcal{L}$

„$\Leftarrow$" trivial

•) ZZ: $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow g_a \in \mathcal{L} \quad \forall a \in \mathbb{R}$, $\int g_a \, d\lambda = \int f \, d\lambda$

allg. Transformationssatz $\rightsquigarrow \int g_a \, d\lambda = \int f \circ \tau_a \, d\lambda = \int f \, d\lambda \tau_a^{-1} \overset{!}{=} \int f \, d\lambda$ (λ translationsinvariant)

gilt g.d.w. eines der beiden Integrale existiert.

6) $\mu(A) := \int_A e^{-|\omega|} \, d\lambda(\omega) + \sum_{q_n \in A} 2^{-n}, \quad A \in \mathcal{L}$

ges.: $\int (\omega^2 1\!\!1_{\mathbb{Q}^c} + 1\!\!1_{\mathbb{Q}}) \, d\mu$

$$\int (\omega^2 1\!\!1_{\mathbb{Q}^c} + 1\!\!1_{\mathbb{Q}}) \, d\mu = \int \omega^2 1\!\!1_{\mathbb{Q}^c} \overset{d\mu}{\forall} + \int 1\!\!1_{\mathbb{Q}} \, d\mu = \int_{\mathbb{Q}^c} \omega^2 \, d\mu + \int_{\mathbb{Q}} d\mu$$

$$\int_{\mathbb{Q}^c} \omega^2 \, d\mu = \int_{\mathbb{Q}^c} \omega^2 e^{-|\omega|} \, d\lambda(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{-|\omega|} \, d\lambda(\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-|\omega|} \, d\omega = \ldots = 2 \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-\omega} \, d\omega = 4.$$

$$\int_{\mathbb{Q}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{q_n\}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{q_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

$$\Rightarrow \int (\omega^2 1\!\!1_{\mathbb{Q}^c} + 1\!\!1_{\mathbb{Q}}) \, d\mu = 5.$$

7) $\exists \, A \subseteq C$ mit $A \notin \mathcal{L}$.

Wissen: $1\!\!1_A$ ist $\mathcal{L}$-messbar $\Leftrightarrow A \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow 1\!\!1_A$ ist nicht messbar $\Rightarrow 1\!\!1_A$ ist nicht $\mathcal{L}$-intbar.

Es gilt $\lambda(A) \leq \lambda(C) = 0. \Rightarrow 1\!\!1_A = 0 \;\; \lambda$-fü.

Somit ist $1\!\!1_A$ beschränkt, λ-fü stetig und somit R-intbar.