

5.1. Sei $U \sim N(\mu, \sigma^2 I_n)$ multivariat normalverteilt und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Projektionsmatrix mit Rang s . Zeigen Sie:

$$\frac{1}{\sigma^2} U' A U \sim \chi_s^2(\delta), \quad \delta = \frac{\mu' A \mu}{\sigma^2}$$

Hinweis: Die orthogonale Projektionsmatrix A lässt sich darstellen als $A = U_1 U_1'$ wobei $U_1 \in \mathbb{R}^{n \times s}$ eine Matrix mit orthonormalen Spalten ist, d.h. $U_1' U_1 = I_s$.

5.2. Gegeben ist eine Stichprobe $y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, $t = 1, \dots, T$. Konstruieren Sie einen Test für $H_0: \mu = 0$.

5.3. Gegeben sind zwei unabhängige Stichproben $x_t \sim N(\mu_x, \sigma^2)$, $t = 1, \dots, T_1$ und $y_t \sim N(\mu_y, \sigma^2)$, $t = 1, \dots, T_2$. Konstruieren Sie einen Test für $H_0: \mu_x = \mu_y$.

5.4. Chow Test auf Strukturbruch. Nehmen Sie an, dass die Daten y , X in zwei Blöcke der Größe T_1 bzw. T_2 zerfallen:

$$\begin{aligned} y_1 &= X_1 \beta + u_1 \\ y_2 &= X_2 \gamma + u_2 \end{aligned}$$

wobei $u_1 \sim N(0, \sigma^2 I_{T_1})$, $u_2 \sim N(0, \sigma^2 I_{T_2})$ und u_1 und u_2 sind unabhängig. Konstruieren Sie einen Test für $H_0: \beta = \gamma$. Wie kann man im Modell

$$\begin{aligned} y_1 &= X_{11} \beta_1 + X_{12} \beta_2 + u_1 \\ y_2 &= X_{21} \beta_1 + X_{22} \gamma_2 + u_2 \end{aligned}$$

die Hypothese $\beta_2 = \gamma_2$ testen.

5.5. OLS Schätzung unter linearen Nebenbedingungen: Berechnen Sie den Kleinst-Quadrate Schätzer unter den Nebenbedingungen $R\beta = r$, wobei $R \in \mathbb{R}^{s \times K}$, $\text{rk}(R) = s$ und $r \in \mathbb{R}^s$:

$$\min_{R\beta=r} (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie folgende Punkte beweisen:

1. Die Lösungsmenge der Gleichung $R\beta = r$ ist von der Form $\{\beta \mid R\beta = r\} = \{\beta = \beta^* + Q\gamma \mid \gamma \in \mathbb{R}^{K-s}\}$ wobei β^* eine beliebige (aber fixe) Lösung ist (d.h. $R\beta^* = r$) und $Q \in \mathbb{R}^{K \times (K-s)}$ eine Matrix ist, deren Spalten den Kern von R aufspannen (d.h. $RQ = 0$).
2. Man definiert nun folgende Matrizen

$$\bar{R} = (X'X)^{-1}R'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}, \quad \bar{Q} = (Q'Q)^{-1}Q', \quad T = (Q, \bar{R}), \quad \bar{T} = \begin{pmatrix} \bar{Q}(I_K - \bar{R}R) \\ R \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: $\bar{Q}Q = I_{K-s}$, $R\bar{R} = I_s$ und $\bar{T}T = I_K$ und daher $\bar{T} = T^{-1}$.

3. Betrachten Sie nun das transformierte Regressionsmodell:

$$(y - X\beta^*) = Z\gamma + u = Z_1\gamma_1 + Z_2\gamma_2 + u$$

wobei $Z = XT = (XQ, X\bar{R})$ und $\gamma = T^{-1}(\beta - \beta^*) = (\gamma_1', \gamma_2')'$, $\gamma_1 = \bar{Q}(I_K - \bar{R}R)(\beta - \beta^*)$, $\gamma_2 = R(\beta - \beta^*)$. Umgekehrt gilt $\beta = \beta^* + T\gamma = \beta^* + Q\gamma_1 + \bar{R}\gamma_2$. Die Restriktion $R\beta = r$ entspricht der Restriktion $\gamma_2 = 0$ im transformierten Modell.

Analoge Formeln gelten für die (unrestringierten und restringierten) OLS Schätzer. Es gilt also z.B. $\hat{\beta} = \beta^* + T\hat{\gamma}$ wobei $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$ die OLS Schätzer für β bzw. γ bezeichnen.

4. Der unrestringierte OLS Schätzer im transformierten Modell ist

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'(y - X\beta^*) \\ (Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'(y - X\beta^*) \end{pmatrix}$$

5. Der restringierte OLS Schätzer ($\gamma_2 = 0$) im transformierten Modell ist

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Z_1' Z_1)^{-1} Z_1' (y - X\beta^*) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Damit kann man nun zeigen, dass der OLS Schätzer für β unter der Nebenbedingung $R\beta = r$ gegeben ist durch

$$\tilde{\beta} = \beta^* + T\tilde{\gamma} = \hat{\beta} - \bar{R}(R\hat{\beta} - r)$$

Beachten Sie, dass $\tilde{\beta} = \beta^* + Q\hat{\gamma}_1$, $\hat{\beta} = \beta^* + Q\hat{\gamma}_1 + \bar{R}\hat{\gamma}_2$ und $\hat{\gamma}_2 = R(\hat{\beta} - \beta^*)$.

7. Die F Test Statistik für $\gamma_2 = 0$ (im transformierten Modell)

$$F = \frac{1}{s} \hat{\gamma}_2' \left(\widehat{\text{Var}}(\hat{\gamma}_2) \right)^{-1} \hat{\gamma}_2 = \frac{1}{s} (R\hat{\beta} - r)' \left(\widehat{\text{Var}}(R\hat{\beta}) \right)^{-1} (R\hat{\beta} - r)$$

ist gleich der Wald Teststatistik für $R\beta = r$. Beachten Sie, dass

$$\text{Var}(\hat{\gamma}) = \sigma^2 (Z_2' Z_2)^{-1} = \sigma^2 (\bar{R}' X' X \bar{R})^{-1} = \sigma^2 (R(X' X)^{-1} R') = \text{Var}(R\hat{\beta} - r)$$

Ökonometrie UE

V, 1. Sei $U \sim N(\mu, \sigma^2 I_n)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orth. Proj.-Matrix, $\text{rg } A = s$

$\exists U_1 \in \mathbb{R}^{n \times s}$ mit $A = U_1 U_1'$ sowie $U_1' U_1 = I_s$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} U' A U = \frac{1}{\sigma^2} U' U_1 U_1' U = \left(\frac{1}{\sigma} U_1' U \right)' \left(\frac{1}{\sigma} U_1' U \right)$$

$$U \sim N(\mu, \sigma^2 I_n) \Rightarrow \frac{1}{\sigma} U_1' U \sim N\left(\frac{1}{\sigma} U_1' \mu, \underbrace{\frac{1}{\sigma^2} U_1' \frac{1}{\sigma} U_1}_{I_s}\right) = N\left(\frac{U_1' \mu}{\sigma}, I_s\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} U' A U \sim \chi_s^2(\delta) \text{ mit } \delta = \left(\frac{U_1' \mu}{\sigma} \right)' \left(\frac{U_1' \mu}{\sigma} \right) = \frac{\mu' U_1 U_1' \mu}{\sigma^2} = \frac{\mu' A \mu}{\sigma^2}$$

2. $y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ $t=1, \dots, T$ i.i.d.

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right) \Rightarrow U := \sqrt{T} \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{y_t - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$Q := (T-1) \frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - \bar{y}}{\sigma} \right)^2 = \left(\frac{y - \bar{y}}{\sigma} \right)' \left(\frac{y - \bar{y}}{\sigma} \right) \sim ?$$

$$\text{Def. } z_t := \frac{y_t - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \underline{z} = (z_t)_{t=1}^T \sim N(0, I_n),$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma}$$

$\exists A \in \mathbb{R}^{T \times T}$ orthogonal, sodass

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ 0_{T-1} & \dots & 0_{T-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Def.: } U := A \underline{z} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix} \Rightarrow U \sim N(A \cdot 0, A' A) = N(0, I_T),$$

$$u_1 = \sqrt{T} \bar{z}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y - \bar{y}}{\sigma} \right)' \left(\frac{y - \bar{y}}{\sigma} \right) = (\underline{z} - \bar{z})' (\underline{z} - \bar{z}) = \underline{z}' \underline{z} - \underbrace{T \bar{z}^2}_{u_1^2} = U' U - u_1^2 = V' V$$

$$\underbrace{\underline{z}' A' A \underline{z}}_{I_T} = U' U \quad \text{mit } V := \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix} \Rightarrow V \sim N(0, I_{T-1})$$

also $Q \sim \chi_{T-1}^2$ und Q nicht von $\bar{z}$ (und daher nicht von $\bar{y}$) abh.

$\Rightarrow Q, U$ unabhängig

$$\Rightarrow T := \frac{U}{\sqrt{Q_{T-1}}} = \sqrt{T} \frac{\bar{y} - \mu}{S} \sim t_{T-1}.$$

$$3. \left. \begin{aligned} x_t &\sim N(\mu_x, \sigma^2), \quad t=1, \dots, T_1 \\ y_t &\sim N(\mu_y, \sigma^2), \quad t=1, \dots, T_2 \end{aligned} \right\} \text{u.o.} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{x} &\sim N(\mu_x, \frac{\sigma^2}{T_1}) \\ \bar{y} &\sim N(\mu_y, \frac{\sigma^2}{T_2}) \end{aligned} \right\} \text{u.o.}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma^2(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}))$$

$$\Rightarrow U := \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_x + \mu_y}{\sigma \sqrt{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} (T_1-1) \frac{S_x^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{T_1-1}^2 \\ (T_2-1) \frac{S_y^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{T_2-1}^2 \end{aligned} \right\} \text{u.o.} \xrightarrow[\Gamma\text{-Vert.}]{\text{Add. Theor.}} Q := \frac{(T_1-1)S_x^2 + (T_2-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi_{T_1+T_2-2}^2$$

U, Q u.o.

$$\Rightarrow T := \frac{U}{\sqrt{Q/(T_1+T_2-2)}} = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu, \mu := \mu_x - \mu_y}{\sqrt{(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}) \frac{(T_1-1)S_x^2 + (T_2-1)S_y^2}{T_1+T_2-2}}} \sim t_{T_1+T_2-2}$$

Test lautet auf $\mu=0$.

$$H_0: \mu_x = \mu_y \hat{=} \mu = 0.$$

4. ~~Restringiertes~~ Modell:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma^2 I_T)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Fehlerquadratsumme: } \hat{u}'\hat{u}$$

unestringiertes Modell:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}}_{=: X} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^R = (X'X)^{-1}X' = \begin{pmatrix} x_1'x_1 & 0 \\ 0 & x_2'x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' & 0 \\ 0 & x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^R & 0 \\ 0 & x_2^R \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{u} = (I_T - X^R)y = \begin{pmatrix} I_{T_1} - x_1^R & 0 \\ 0 & I_{T_2} - x_2^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{u}'\hat{u} = \hat{u}_1'\hat{u}_1 + \hat{u}_2'\hat{u}_2; \quad \text{rg}(I_T - X^R) = \text{rg}(I_{T_1} - x_1^R) + \text{rg}(I_{T_2} - x_2^R) = T_1 + T_2 - 2K$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \hat{u}'\hat{u} = \frac{1}{\sigma^2} (\hat{u}_1'\hat{u}_1 + \hat{u}_2'\hat{u}_2) \sim \chi_{T_1+T_2-2K}^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} (\hat{u}'\hat{u} - \hat{u}'\hat{u}) \sim \chi_K$$

$$\Rightarrow \frac{T_1+T_2-2K}{\hat{u}'\hat{u} - (\hat{u}_1'\hat{u}_1 + \hat{u}_2'\hat{u}_2)} \sim F_{K, T_1+T_2-2K} \quad \text{unter } H_0: \beta = 0 \hat{=} \gamma = 0$$

Modell $y_1 = X_{11}\beta_1 + X_{12}\beta_2 + u_1$
 $y_2 = X_{21}\beta_1 + X_{22}\beta_2 + u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{21} & 0 & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Noch Substitution:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{21} & X_{22} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ y_2 - \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~F~~-Test auf $\beta_3^* = 0$.

Bew. mit Rest, $RB=r$ Wald-Test

5. (i) Sei $\beta = \beta^* + Qy$. $\Rightarrow RB = R(\beta^* + Qy) = \overbrace{R\beta^*}^r + \overbrace{RQ}^0 y = r$.

Sei $RB=r$. $\Rightarrow 0 = RB - R\beta^* = R(\beta - \beta^*)$

d.h. $\beta - \beta^* \in \text{Kern } R \Rightarrow \beta - \beta^* = Qy \Rightarrow \beta = \beta^* + Qy$.

(ii) $\bar{Q}Q = (Q'Q)^{-1}Q'Q = I_{k-s}$

$R\bar{R} = R(X'X)^{-1}R'(R(X'X)^{-1}R')^{-1} = I_s$

$TT = \begin{pmatrix} \bar{Q}(I_k - \bar{R}R) \\ R \end{pmatrix} (Q, \bar{R}) = \begin{pmatrix} \bar{Q}(I_k - \bar{R}R)Q & \bar{Q}(I_k - \bar{R}R)\bar{R} \\ RQ & R\bar{R} \end{pmatrix} = I_k$

da $RQ=0$, $R\bar{R}=I_s$, $\bar{Q}Q - \bar{Q}\bar{R}RQ = I_{k-s}$, $\bar{Q}\bar{R} - \bar{Q}\bar{R}R\bar{R} = 0$.

(iii) $y = X\beta + u \Leftrightarrow y - X\beta^* = X(\beta - \beta^*) + u = \underbrace{XT}_{Z} \underbrace{T^{-1}(\beta - \beta^*)}_{\hat{y}} + u$

$\hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = T^{-1}(\beta - \beta^*) = \begin{pmatrix} \bar{Q}(I_k - \bar{R}R)(\beta - \beta^*) \\ R(\beta - \beta^*) \end{pmatrix}$

$\beta = \beta^* + TT^{-1}(\beta - \beta^*) = \beta^* + T\hat{y} = \beta^* + (Q, \bar{R}) \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix}$

$RB=r \Leftrightarrow \underbrace{R\beta^*}_r + \underbrace{RQ}_{0}\hat{y}_1 + \underbrace{R\bar{R}}_{I_s}\hat{y}_2 = r \Leftrightarrow \boxed{\hat{y}_2 = 0}$

(iv) ~~$y - X\beta^* = Z\hat{y} + u \rightarrow \hat{y} = (Z'Z)^{-1}Z'(y - X\beta^*) = Z^+(y - X\beta^*)$~~

$Z'Z = \begin{pmatrix} Q'X' \\ R'X' \end{pmatrix} (XQ, X\bar{R}) = \begin{pmatrix} Z_1'Z_1 & Q'X'X\bar{R} \end{pmatrix}$

$$(iv) y - X\beta^* = Z\gamma + u \Rightarrow \hat{\gamma} = Z^r(y - X\beta^*)$$

$$Z^r = (Z'Z)^{-1}Z' = \begin{pmatrix} Z_1'Z_1 & Z_1'Z_2 \\ Z_2'Z_1 & Z_2'Z_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1'Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2'Z_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1^r \\ Z_2^r \end{pmatrix}$$

$$\text{da } Z_1'Z_2 = Q'(X'X\bar{R}) = \underbrace{Q'R'}_{(RQ)'=0} (R(X'X)^{-1}R')^{-1} = 0.$$

$$\Rightarrow \hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1^r \\ Z_2^r \end{pmatrix} (y - X\beta^*)$$

$$(v) \gamma_2 = 0 \Rightarrow y - X\beta^* = Z_1\gamma_1 + u$$

$$\hat{\gamma}_2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_1 = Z_1^r(y - X\beta^*) = \hat{\gamma}_1.$$

$$(vi) \hat{\beta} = X^r y = X^r (Z\gamma + X\beta^* + u) = \underbrace{X^r X T}_{\hat{I}} \gamma + \underbrace{X^r X}_{\hat{I}} \beta^* + \underbrace{X^r u}_0$$

$$= T\gamma + \beta^* = \beta^* +$$

$$Z^r = (Z'Z)^{-1}Z' = (T'X'XT)^{-1}T'X' = T^{-1}(X'X)^{-1}X' = T^{-1}X^r$$

$$\Rightarrow \hat{\gamma} = Z^r(y - X\beta^*) = T^{-1}X^r(y - X\beta^*) = T^{-1}\underbrace{X^r y}_{\hat{\beta}} - T^{-1}\underbrace{X^r X}_{\hat{I}}\beta^* = T^{-1}\hat{\beta} - T^{-1}\beta^*$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta} = \beta^* + T\hat{\gamma} = \beta^* + Q\hat{\gamma}_1 + \bar{R}\hat{\gamma}_2$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = \beta^* + Q\hat{\gamma}_1$$

$$\downarrow$$

$$\hat{\gamma} = T^{-1}(\hat{\beta} - \beta^*)$$

$$\hat{\gamma}_2 = Z_2^r(y - X\beta^*) = (\bar{R}'X'X\bar{R})^{-1}\bar{R}'X'(y - X\beta^*)$$

$$= \underbrace{\bar{R}^{-1}}_{\bar{R}} (X'X)^{-1}X'(y - X\beta^*)$$

$$= \bar{R}(X^r y - X^r X\beta^*) = \bar{R}(\hat{\beta} - \beta^*) = \bar{R}\hat{\beta} - r$$

$$\hat{\gamma}_2 = T^{-1}(\hat{\beta} - \beta^*) = \bar{R}(\hat{\beta} - \beta^*) = \bar{R}\hat{\beta} - r$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = \hat{\beta} - \bar{R}\hat{\gamma}_2 = \hat{\beta} - \bar{R}(\bar{R}\hat{\beta} - r)$$

$$(vii) H_0: \gamma_2 = \tilde{\gamma}_2 = 0$$

$$F = \frac{1}{s} (\hat{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_2)' (\widehat{\text{Var}}(\hat{\gamma}_2))^{-1} (\hat{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_2)$$

$$= \frac{1}{s} \hat{\gamma}_2' (\widehat{\text{Var}}(\hat{\gamma}_2))^{-1} \hat{\gamma}_2$$

$$= \frac{1}{s} (R\hat{\beta} - r)' (\widehat{\text{Var}}(R\hat{\beta} - r))^{-1} (R\hat{\beta} - r) = W$$

$$= \widehat{\text{Var}}(R\hat{\beta})$$

$$X^r := X^+ = (X'X)^{-1}X'$$

$$Z^r := Z^+$$

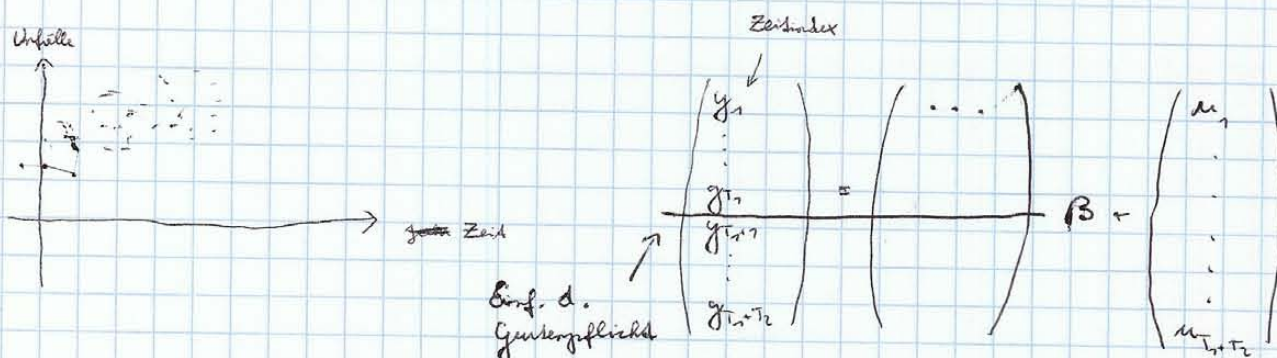
5.3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{T_1} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{T_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y - \mu_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{T_1+T_2} \end{pmatrix}$$

$$y = X \beta + u$$

$$H_0: \beta_2 = 0.$$

5.4



5.2

$$y_t = \mu + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$H_0: \mu = 0$$

$$\hat{\mu} = \bar{y}$$

$$\tau = \frac{\hat{\mu} - 0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu})}} = \sqrt{T} \frac{\bar{y}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \sim t_{T-1} \quad \text{Var } \hat{\mu} = \text{Var } \bar{y} = \frac{\sigma^2}{T}$$