9.1. Betrachten Sie ein einfaches, homogenes Regressionsmodell $y_t = x_t\beta + u_t$ mit heteroskedastischen Fehlern $\mathbf{E}u_t = 0$, $\mathbf{E}u_s u_s = 0$ für $t \neq s$ und $\mathbf{E}u_t^2 = t\sigma^2$. Nehmen Sie weiters an, dass $0 < c_1 \leq |x_t| \leq c_2 < \infty$ für alle $t = 1, 2, \ldots$ gilt.

1. Ist der GLS Schätzer $\tilde{\beta}_T$ konsistent?
2. Ist der OLS Schätzer $\hat{\beta}_T$ consistent?

Hinweis: Es genügt, wenn Sie die Konsistenz im quadratischen Mittel betrachten. Daher müssen Sie nur untersuchen, ob die Varianz der Schätzer gegen null konvergiert oder nicht.

9.2. Zeigen Sie, dass die t-Teststatistik unter der Nullhypothese gegen eine Standard Normalverteilung konvergiert. Verwenden Sie dazu die Annahmen von Theorem 5.21.

9.3. Zeigen Sie, dass der OLS Schätzer $\hat{\beta}$ im verallgemeinerten Regressionsmodell asymptotisch normal verteilt ist. Setzen Sie dazu geeignete Annahmen.

9.4. Betrachten Sie das lineare Trendmodell $y_t = \beta_1 + t\beta_2 + u_t$ mit unabhängig identisch verteilten Fehlern u_t und $\mathbf{E}u_t = 0$ und $\mathbf{Var}(u_t) = \sigma^2$. Ist es möglich, ein CLT für den OLS Schätzer $\hat{\beta}_T$ der Form

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 V)$$

wie in Theorem 5.21 zu beweisen? Hinweis: Analysieren Sie den Grenzwert von $\frac{1}{T}X_T'X_T$ für T gegen unendlich. Sie können dabei die Identitäten $\sum_{t=1}^T t = \frac{T(T+1)}{2}$ und $\sum_{t=1}^T t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$ verwenden um zu zeigen, dass

$$X_T'X_T = \begin{pmatrix} \frac{T}{1} & \frac{T(T+1)}{2} \\ \frac{T(T+1)}{2} & \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} \end{pmatrix} \text{ und } (X_T'X_T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2(2T+1)}{T(T-1)} & -\frac{6}{T(T-1)} \\ -\frac{6(\cancel{T+1})}{T(T-1)} & \frac{12}{T(T+1)(T-1)} \end{pmatrix}$$

9.1)

$$y_t = x_t \beta + u_t \qquad \mathbb{E} u_t = 0$$

$$\operatorname{Cov}(u_s, u_t) = 0 \quad (s \neq t)$$

$$\operatorname{Var} u_t = t\sigma^2$$

$$0 < c_1 \leq |x_t| \leq c_2 < \infty \qquad \forall t.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var} u_T = \sigma^2 \Omega_T = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{pmatrix}$$

1. $\tilde{\beta}_T$ konsistent ? (im Qu. Mittel)

$\Updownarrow$

$\operatorname{Var} \tilde{\beta}_T \to 0$, da $\tilde{\beta}_T$ erwartungstreu

$$\operatorname{Var} \tilde{\beta}_T = \sigma^2 (X_T' \Omega_T^{-1} X_T)^{-1} \to 0$$

g.d.w. $(X_T' \Omega_T^{-1} X_T)^{-1} \to 0$

$$\Omega_T = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & & & 0 \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{T} \end{pmatrix}$$

$$X_T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_T' \Omega_T^{-1} X_T = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{1} & & & \\ & \frac{x_2^2}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{x_3^2}{T} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (X_T' \Omega_T^{-1} X_T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2} & & & \\ & 2\frac{1}{x_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T\frac{1}{x_T^2} \end{pmatrix}$$

$$X_T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix} \qquad \Omega_T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega_T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{T} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_T' \Omega_T^{-1} X_T = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{t} x_t^2 \geq c_1^2 \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{t} \to \infty \quad \text{für } T \to \infty$$

$$\Rightarrow (X_T' \Omega_T^{-1} X_T)^{-1} \to 0 \quad \Rightarrow \tilde{\beta}_T \text{ konsistent.}$$

2. $\hat{\beta}_T$ konsistent?

$$\operatorname{Var} \hat{\beta}_T = \sigma^2 (X_T' X_T)^{-1} (X_T' \Omega_T X_T) (X_T' X_T)^{-1}$$

$$(X_T' X_T)^{-1} (X_T' \Omega_T X_T) (X_T' X_T)^{-1} = \Big(\underbrace{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}_{\leq T c_2^2} \Big)^{-2} \sum_{t=1}^{T} t\, x_t^2$$

$$\geq \frac{1}{T^2 c_2^4} c_1^2 \sum_{t=1}^{T} t = \frac{c_1^2\, T(T+1)}{T^2 c_2^4\, 2} \to \frac{c_1^2}{c_2^4\, 2} > 0$$

$$\left(= \frac{c_1^2}{c_2^4} \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \frac{t}{T}}_{\downarrow \; \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}} \to \frac{c_1^2}{2 c_2^4} > 0 \right)$$

$\Rightarrow \hat{\beta}_T$ ist nicht konsistent.

9.2)

$$t_T = \frac{\tilde{\beta}_{T_k} - \beta_k}{\sqrt{\widehat{Var}\, \tilde{\beta}_{T_k}}} = \frac{\tilde{\beta}_{T_k} - \beta_k}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 \left(X_T' \Omega_T^{-1} X_T\right)^{-1}_{kk}}} \sim t_{T-K}$$

$$=$$

$$\frac{\sqrt{T}\left(\tilde{\beta}_{T_k} - \beta_k\right)}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2\, T \left(X_T' \Omega_T^{-1} X_T\right)^{-1}_{kk}}}$$

$$=$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \left(\tilde{\sigma}^2 \left(X_T' \Omega_T^{-1} X_T\right)^{-1}_{kk}\right)^{-\frac{1}{2}}} \sqrt{T}\left(\tilde{\beta}_{T_k} - \beta_k\right)$$

$$\left(\tilde{\sigma}^2 \underbrace{\left(\frac{1}{T} X_T' \Omega_T^{-1} X_T\right)^{-1}_{kk}}_{\substack{\downarrow\, d_1, d_2 \\ V_{kk} > 0}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\overbrace{\sqrt{T}\left(\tilde{\beta}_{T_k} - \beta_k\right)}^{\xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 V_{kk})}}{\sqrt{\underbrace{\tilde{\sigma}^2}_{\downarrow\, \sigma^2} V_{kk}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{T}\left(\hat{\beta}_k - \beta_k\right)}{\sqrt{\sigma^2 V_{kk}}}}_{\substack{\downarrow d \\ N(0,1)}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\sigma^2 V_{kk}}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \sqrt{\frac{1}{T}\left[(\ \ )^{-1}_{kk}\right]}}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

9.4)

$$\frac{1}{T}X_T'X_T = \frac{1}{T}\begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} t \\ \sum_{t=1}^{T} t & \sum_{t=1}^{T} t^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{T}\begin{pmatrix} T & \frac{T(T+1)}{2} \\ \frac{T(T+1)}{2} & \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} \end{pmatrix}$$

$$y_T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix}}_{X_T}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + u_T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{T+1}{2} \\ \frac{T+1}{2} & \frac{(T+1)(2T+1)}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{T \cdot Var(\hat\beta_T)}{\overset{\shortparallel}{\left(\frac{1}{T}X_T'X_T\right)^{-1}}} = \underbrace{\left[\frac{(T+1)(2T+1)}{6} - \frac{(T+1)^2}{4}\right]^{-1}}\begin{pmatrix} \frac{(T+1)(2T+1)}{6} & -\frac{T+1}{2} \\ -\frac{T+1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{T+1}{12}\left(2(2T+1) - 3(T+1)\right)$$

$$\frac{T+1}{12}(T-1) = \frac{T^2-1}{12}$$

$$= \frac{12}{T^2-1}\begin{pmatrix} \frac{(T+1)(2T+1)}{6} & -\frac{T+1}{2} \\ -\frac{T+1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\frac{2T+1}{T-1} & -\frac{6}{T-1} \\ -\frac{6}{T-1} & \frac{12}{T^2-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{T\to\infty} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not> 0$$

$$\frac{2T+1}{T-1} = \frac{2+\frac{1}{T}}{1-\frac{1}{T}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{T}(\hat\beta_1-\beta_1) \to \checkmark \\ \sqrt{T}(\hat\beta_2-\beta_2) \not\to \end{cases}$$ da $\hat\beta_2$ geht zu schnell gegen β_2 $\Rightarrow$ skalieren!

$$Var\begin{pmatrix} \sqrt{T}(\hat\beta_1-\beta_1) \\ T^{x}(\hat\beta_2-\beta_2) \end{pmatrix} \longrightarrow W > 0.$$